Marcin Karpiński

# Analiza wyników egzaminu maturalnego uczniów, którzy w roku 2015 zdawali maturę według formuły dostosowanej do nowej podstawy programowej

## Matematyka, zakres podstawowy

Warszawa, październik 2015

Autor:
Marcin Karpiński

Statystyczne opracowanie wyników:
Bartosz Kondratek

Wzór cytowania:

Karpiński, M. (2015). *Analiza wyników egzaminu maturalnego uczniów, którzy w roku 2015 zdawali maturę według formuły dostosowanej do nowej podstawy programowej. Matematyka, zakres podstawowy*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.

Wydawca:
*Instytut Badań Edukacyjnych*
*ul. Górczewska 8*
*01-180 Warszawa*
*tel. (22) 241 71 00; www.ibe.edu.pl*



Publikacja opracowana w ramach projektu systemowego*: Badanie jakości i efektywności edukacji oraz instytucjonalizacja zaplecza badawczego,* współfinansowanego przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego, realizowanego przez Instytut Badań Edukacyjnych.

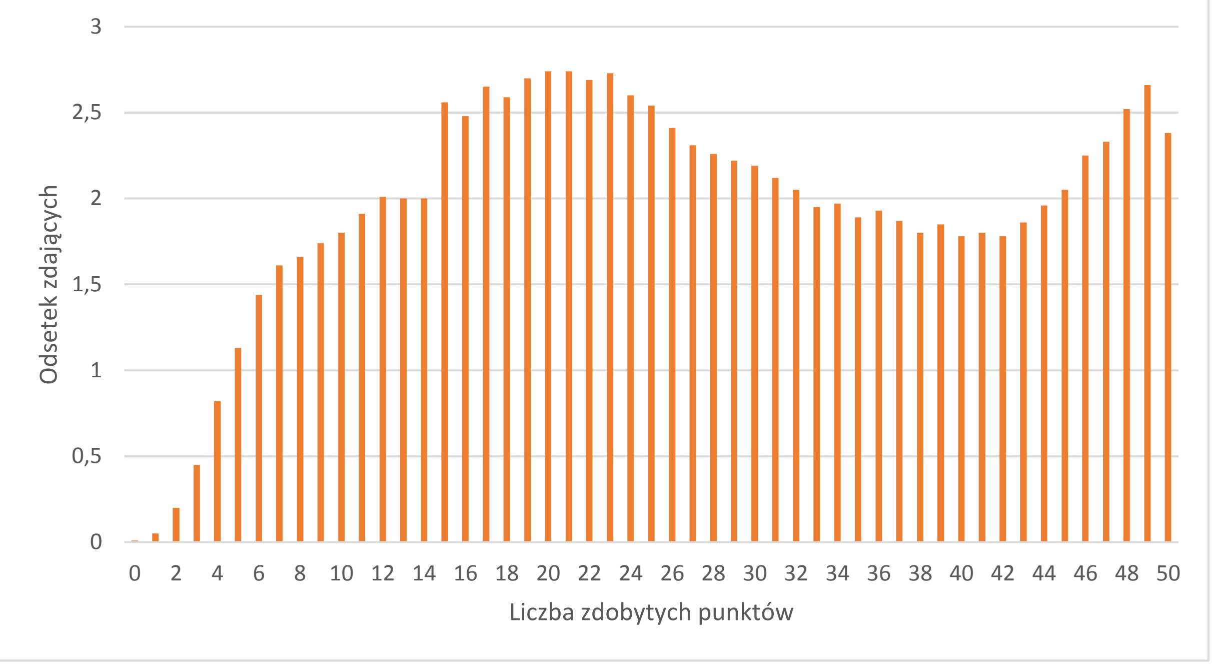
Egzemplarz bezpłatny

# Spis Treści

# 1. Wstęp

Rozkład wyników wszystkich zdających w 2015 maturę z matematyki na poziomie podstawowym w liceach przedstawiono na poniższym diagramie.

**Wykres 1. Procentowy rozkład liczby zdobytych punktów**




Średni wynik uzyskany na egzaminie to 27,5 punktu, czyli 55% możliwych do zdobycia punktów, a odchylenie standardowe to 14 punktów (26%).

Dwumodalny kształt diagramu wynika zapewne z faktu, że grupa zdających dzieliła się na dwie części o wyraźnie różnych umiejętnościach matematycznych. Tych, którzy uczyli się według zakresu podstawowego – to 72% wszystkich zdających – oraz tych, którzy przygotowywali się do matury według zakresu rozszerzonego – to 28% zdających.

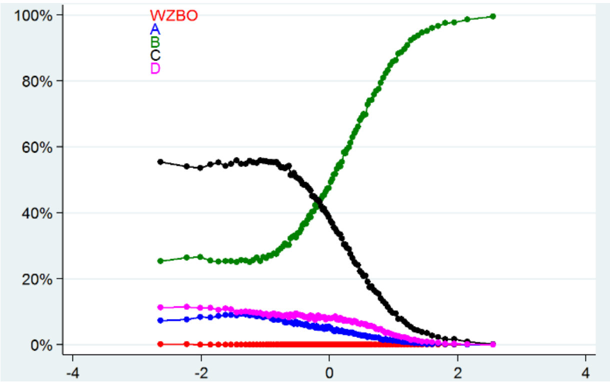
Takie ogólne informacje mogą oczywiście dać tylko ogólny pogląd na rozkład umiejętności uczniów i na konstrukcję egzaminu. Jeśli chcemy głębiej zanalizować umiejętności matematyczne maturzystów, musimy się dokładnie przyjrzeć wynikom poszczególnych zadań. Ważne przy tym będą nie tylko odsetki poprawnych odpowiedzi, ale przede wszystkim rodzaje błędów popełnianych przez maturzystów.
Z takiej analizy można wyciągać wnioski nie tylko o poziomie umiejętności uczniów, ale także o najważniejszych obszarach, w których warto poprawić nauczanie matematyki w polskich szkołach.

Przy analizie wyników zadań posługiwaliśmy się głównie trzema rodzajami informacji:

- I. Danymi o odsetkach uczniów wybierających poszczególne odpowiedzi w zadaniach zamkniętych lub odsetkami liczby uczniów, którzy zdobyli daną liczbę punktów w zadaniach otwartych.
- II. Modelami stworzonym metodą IRT (Item Response Theory).
- III. W zadaniach zamkniętych korzystaliśmy z wykresów częstotliwości wyboru odpowiedzi w zależności od wyniku uczniów dla całego zestawu zadań maturalnych z matematyki. Ten

wynik z matury na poziomie podstawowym będziemy w skrócie nazywać poziomem umiejętności matematycznych ucznia, choć oczywiście zdajemy sobie sprawę z tego, że egzamin maturalny w danym roku nie mierzy wszystkich umiejętności matematycznych. Przykład takiego wykresu pokazano poniżej.

**Wykres 2. Przykładowy wykres**




Na osi poziomej mierzymy poziom umiejętności uczniów, czyli ich wynik osiągnięty w całym egzaminie z matematyki na poziomie podstawowym. Punkt 0 oznacza średni wynik z całego arkusza wszystkich maturzystów, czyli 55% możliwych do zdobycia punktów. Punkt 1 – wynik o odchylenie standardowe większy, czyli 81%, a punkt –1 to wynik o odchylenie standardowe mniejszy od średniej, czyli 31% możliwych do zdobycia punktów. Jednostką na osi poziomej jest tu więc odchylenie standardowe, a próg zdawalności matury w tej skali odpowiada mniej więcej współrzędnej –1 na osi poziomej.

Na osi pionowej mierzymy odsetek uczniów udzielających danej odpowiedzi. Kropki na wykresach oznaczają kolejne centyle uczniów. Literami A, B, C i D oznaczone są poszczególne odpowiedzi, a skrót WZBO oznacza „wielokrotne zaznaczenie lub brak odpowiedzi”.

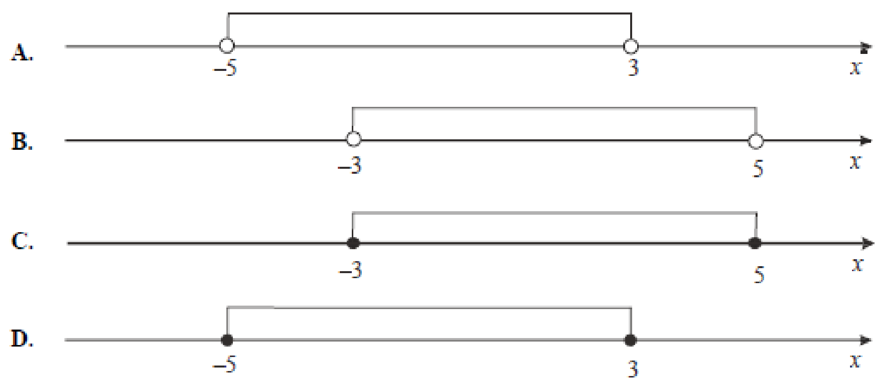
Takim wykresem posługiwać się będziemy tylko przy tych zadaniach, dla których analizy wnosi on istotnie informacje.

# 2. Analiza wyników poszczególnych zadań

W przedstawionym poniżej krótkim omówieniu wyników każdego zadania interesuje nas nie tylko odsetek maturzystów, którzy poprawnie rozwiązali zadanie Równie ważna, a czasami ważniejsza, jest analiza błędnych odpowiedzi. Dla oceny umiejętności matematycznych całej populacji i dla sformułowania wniosków o cechach nauczania matematyki w Polsce takie informacje są niezbędne.

**Zadanie 1. (0–1)**

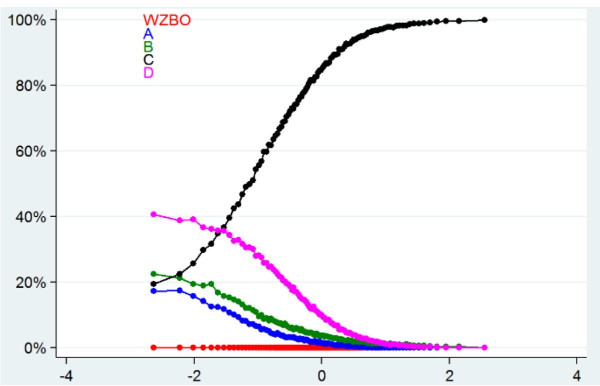
Wskaż rysunek, na którym przedstawiono przedział, będący zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-4 \le x-1 \le 4$.




| | |
|---|---|
| A | 3% |
| B | 5% |
| C* | 78% |
| D | 13% |

Zadanie zostało tak skonstruowane, że wyłapywało uczniów popełniających dwa typowe błędy: błąd w przekształcaniu nierówności i błąd polegający na niezauważeniu, że nierówności są nieostre. Oba typy błędów świadczą o braku pewnego rodzaju technicznych umiejętności matematycznych lub braku wprawy w posługiwaniu się nimi. Ponad 20% maturzystów nie poradziło sobie z tym zadaniem. Wśród nich niemal trzykrotnie częściej występował brak umiejętności przekształcania nierówności niż błąd polegający na niezauważeniu, że nierówność jest nieostra. Ten pierwszy błąd, czyli wybór odpowiedzi D u najsłabszych uczniów (aż do 6 centyla) był częstszy niż wskazanie poprawnej odpowiedzi, popełniło go prawie 40% z nich. Zdarzał się też uczniom całkiem niezłym. Około 10% tych uczniów, którzy z matury osiągnęli wynik równy średniej, nie radzi sobie z przekształcaniem nierówności liniowych.

**Wykres 3. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 1. w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




| | |
|---|---|
| A | 4% |
| B* | 83% |
| C | 9% |
| D | 4% |

**Zadanie 2. (0–1)**

Dane są liczby $a=-\frac{1}{27}$, $b=\log_{\frac{1}{4}}64$, $c=\log_{\frac{1}{3}}27$. Iloczyn $abc$ jest równy

**A.** $-9$ **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $3$

W zadaniu skorzystać należało z definicji logarytmu (jest ona podana w zestawie wzorów, do którego uczniowie mogli zajrzeć w czasie egzaminu). Trzeba się też było wykazać umiejętnością mnożenia liczb wymiernych. Najczęściej popełniany błąd – wybór odpowiedzi C – świadczy najprawdopodobniej o nieuwadze przy mnożeniu liczb ujemnych. Wprawdzie ponad 80% maturzystów wskazało poprawną odpowiedź, ale konstrukcja zadania nie pozwala ocenić odsetka tych, którzy poprawnie stosują definicje logarytmu. Podane w zadaniu liczby są niestety tak dobrane, że gdy uczeń popełnia dwukrotnie ten sam dość typowy błąd, otrzyma dobrą odpowiedź. Ten typowy błąd to uznanie, że liczby b oraz c są równe 3 (zamiast – 3).

**Zadanie 3. (0–1)**

Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 19%. Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa

**A.** $1000\cdot\left(1-\frac{81}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$ **B.** $1000\cdot\left(1+\frac{19}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$

**C.** $1000\cdot\left(1+\frac{81}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$ **D.** $1000\cdot\left(1-\frac{19}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$

| | |
|---|---|
| A | 7% |
| B | 19% |
| C* | 49% |
| D | 24% |

Obliczanie odsetek to jedna z tych umiejętności matematycznych kształconych w szkole, które wprost przydają się w codziennym życiu. Warto przypomnieć, że z zagadnieniem liczenia odsetek od lokaty rocznej uczniowie spotkali się już na lekcjach matematyki w gimnazjum. W zadaniu trzeba się było wykazać rozumieniem sensu wykonywanych obliczeń, a nie samymi umiejętnościami rachunkowymi. Jeśli pominiemy trudności uczniów związane z czytaniem takich złożonych wyrażeń arytmetycznych, to maturzysta musiał tylko umieć odpowiedzieć na trzy pytania:

1. Czy odsetki są dodawane do kapitału czy odejmowane od niego?

2. Czy podatek jest dodawany do kapitału, czy odejmowany od niego?

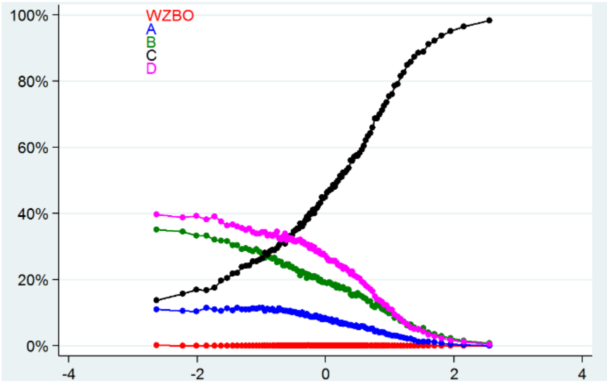
3. Jaka część kapitału z odsetkami zostanie po odjęciu podatku?

Poprawną odpowiedź wskazała mniej niż połowa maturzystów. To alarmujący wynik. Prawie jedna czwarta maturzystów wskazała odpowiedź D. Popełnili błąd wskazujący, że nie rozumieją, jakim modelem matematycznym należy opisać działanie odsetek i podatków, albo w ogóle nie potrafią interpretować znaczenia poszczególnych działań w modelu arytmetycznym opisującym naliczanie odsetek i podatków.

Z poniższego wykresu częstotliwości wyboru odpowiedzi widać, że wszystkie trzy linie ilustrujące odsetki błędnych odpowiedzi opadają bardzo powoli. Nawet najlepsi uczniowie miewają problemy z tego typu obliczeniami. Ponad 15% uczniów z 90 centyla popełniło w tym zadaniu błąd.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
IBE entuzjaści edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**Wykres 4. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 3.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 4. (0–1)**

Równość $\frac{m}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ zachodzi dla

**A.** $m=5$ **B.** $m=4$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-5$

| | |
|---|---|
| A | 8% |
| B* | 80% |
| C | 4% |
| D | 7% |

Bez względu na przyjętą przez ucznia strategię rozwiązania (rozwiązanie równania lub podstawianie proponowanych odpowiedzi), musiał on wykonać rachunki na pewnych, szczególnego typu liczbach niewymiernych. Zadanie sprawdzało więc drobną, techniczną umiejętność działania na takich liczbach. Okazało się, że takie przekształcenia potrafi wykonać 80% maturzystów. Błędy popełniane przez uczniów były niemal wyłącznie błędami rachunkowymi.

**Zadanie 5. (0–1)**

Układ równań $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+0,5y=4 \end{cases}$ opisuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie

**A.** zbiór pusty.
**B.** dokładnie jeden punkt.
**C.** dokładnie dwa różne punkty.
**D.** zbiór nieskończony.

| | |
|---|---|
| A | 5% |
| B* | 54% |
| C | 34% |
| D | 7% |

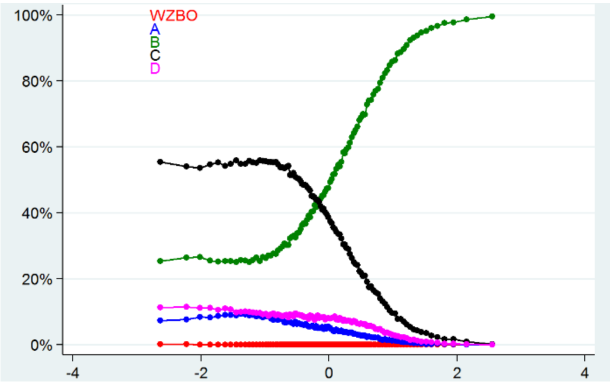
Aby dobrze rozwiązać to zadanie, nie wystarczyło umieć rozwiązywać układ równań liniowych. Trzeba było jeszcze rozumieć (lub wiedzieć), jaka jest interpretacja geometryczna rozwiązania. Z układami takich równań uczniowie spotkali się już w gimnazjum.

Zaskakuje słaby wynik: niewiele więcej niż połowa maturzystów potrafiła rozwiązać to zadanie. Ponad jedna trzecia maturzystów sądzi, że skoro rozwiązaniem układu równań jest para liczb, to interpretacją tego rozwiązania w układzie współrzędnych jest para punktów. To może świadczyć o tym, że u tej części uczniów bardzo słabo powiązane są ze sobą umiejętności matematyczne z różnych działów matematyki szkolnej (tu: algebry i geometrii analitycznej).

Na wykresie częstotliwości wyboru odpowiedzi charakterystyczne jest, jak długo linia wyboru odpowiedzi D utrzymuje się niemal w poziomie. To oznacza, że ten błąd równie często popełniają uczniowie o niskich, jak uczniowie o przeciętnych umiejętnościach matematycznych. Pozostałe błędy, choć popełniane rzadziej, także niezbyt silnie zależą od poziomu umiejętności i nikną dopiero wśród najlepszych uczniów.

Nawet wśród uczniów bardzo dobrych – takich którzy osiągnęli wynik o odchylenie standardowe większy od przeciętnego (czyli zdobyli ok. 70% punktów) – było około 30% takich, którzy nie potrafili rozwiązać tego zadania.

**Wykres 5. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 5. w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 6. (0–1)**

Suma wszystkich pierwiastków równania $(x+3)(x+7)(x-11)=0$ jest równa

**A.** $-1$ **B.** $21$ **C.** $1$ **D.** $-21$

| | |
|---|---|
| A | 7% |
| B | 4% |
| C* | 85% |
| D | 4% |

Maturzysta miał pokazać w tym zadaniu, że rozumie, iż iloczyn jest równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest równy zeru. Tylko 15% maturzystów z tym sobie nie poradziło. Część z nich popełniła błędy rachunkowe w dodawaniu trzech liczb całkowitych, ale zapewne znaczna część (np. z tych, którzy wybrali odpowiedź A) nie przeprowadziła w tym zadaniu rozumowania, tylko mechanicznie traktowali jako pierwiastki liczby występujące w równaniu z dość przypadkowymi znakami.

**Zadanie 7. (0–1)**

Równanie $\frac{x-1}{x+1}=x-1$

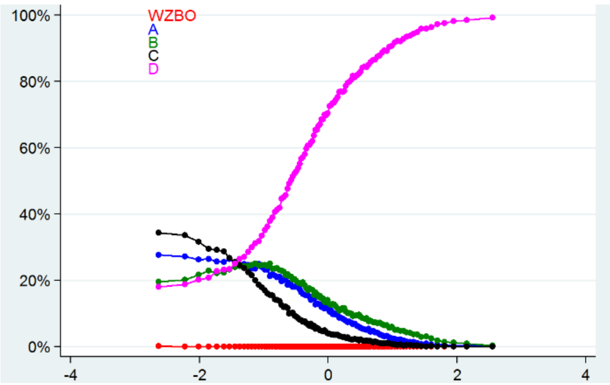
**A.** ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=1$.
**B.** ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=0$.
**C.** ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=-1$.
**D.** ma dokładnie dwa rozwiązania: $x=0$, $x=1$.

| | |
|---|---|
| A | 12% |
| B | 14% |
| C | 8% |
| D* | 65% |

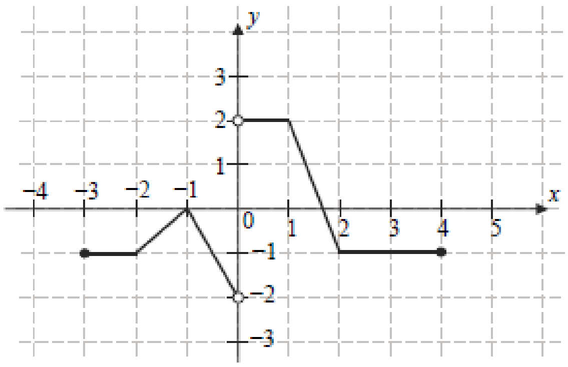
To zadanie zamknięte, w którym trzeba było wybrać, która z podanych liczb jest rozwiązaniem danego równania. Uczniowie mogli więc rozwiązywać je dwiema strategiami: po prostu rozwiązać równanie i sprawdzić, w której z odpowiedzi pojawiają się otrzymane wyniki, albo podstawiać do równania kolejne liczby proponowane w odpowiedziach. Z tego powodu trudno jest ocenić, z jakiego rodzaju błędami uczniów mamy tu do czynienia. Niepokoi już sam fakt, że ponad jedna trzecia maturzystów nie potrafiła rozwiązać tego zadania żadną z dwóch strategii. Uczniowie, którzy wybrali odpowiedzi A lub B, nie potrafią przekształcać tego typu prostych wyrażeń albo nie rozumieją, że równanie może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Wskazanie odpowiedzi C mogło być dodatkowo skutkiem zignorowania dziedziny równania lub mnożenia i dzielenia obu jego stron przez wyrażenia, które nie dla każdej wartości niewiadomej x są różne od zera. Równanie nie było zbyt złożone, więc uczniowie, którzy sobie z nim nie poradzili, mają podstawowe problemy z rachunkiem algebraicznym. Na poniższym wykresie widać, że dotyczy to głównie uczniów o niższych umiejętnościach matematycznych, ale ten przedział sięga aż do 25 centyla. Nawet ok. 30% przeciętnych uczniów ma kłopoty z tego typu algebrą.

**Wykres 6. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 7.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 8. (0–1)**
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.




| | |
|---|---|
| A | 71% |
| B | 2% |
| C | 4% |
| D* | 22% |

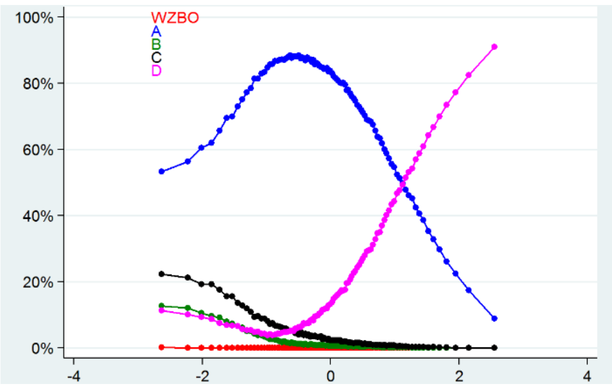
Zbiorem wartości funkcji *f* jest

**A.** $(-2, 2)$ **B.** $\langle -2, 2)$ **C.** $\langle -2, 2\rangle$ **D.** $(-2, 2\rangle$

W zadaniu z góry podano, że zbiorem wartości podanej funkcji jest przedział od -2 do 2, a maturzyści mieli jedynie zdecydować, który brzeg należy do tego przedziału. Zadanie okazało się być pułapką, w którą wpadło prawie 80% maturzystów. Najczęściej wybierana odpowiedź A (ponad 70% zdających) świadczyć może o mechanicznym odczytaniu zbioru wartości wprost z osi y (w zadaniu, niezbyt szczęśliwie, wykres dochodził do samej osi *y* zarówno na wysokości – 2, jak i 2).

Charakterystyczny jest wykres odpowiadający odpowiedzi A. Wraz ze wzrostem umiejętności matematycznych uczniów, aż do poziomu uczniów przeciętnych, rośnie odsetek osób wybierających tę błędną odpowiedź.

**Wykres 7. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 8.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**



**Zadanie 9. (0–1)**

Na wykresie funkcji liniowej określonej wzorem $f(x)=(m-1)x+3$ leży punkt $S=(5,-2)$. Zatem

A. $m=-1$ B. $m=0$ C. $m=1$ D. $m=2$

| | |
|---|---|
| A | 5% |
| B* | 80% |
| C | 8% |
| D | 7% |

Głównym celem zadania miało być sprawdzenie, czy uczniowie rozumieją, jaki jest związek między wzorem funkcji a współrzędnymi punktu leżącego na jej wykresie. Poprawną odpowiedź wskazało 80% maturzystów.

Zadanie jednak niestety skonstruowano tak, że tę odpowiedź otrzymali zarówno ci, którzy dobrze rozumieli, w które miejsca wzoru funkcji należy wstawiać kolejne współrzędne punktu S, jak i ci, którzy popełnili pomyłkę i przyjęli, że *x* = – 2 (zamiast *x* = 5).

**Zadanie 10. (0–1)**

Funkcja liniowa *f* określona wzorem $f(x)=2x+b$ ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa $g(x)=-3x+4$. Stąd wynika, że

A. $b=4$ B. $b=-\frac{3}{2}$ C. $b=-\frac{8}{3}$ D. $b=\frac{4}{3}$

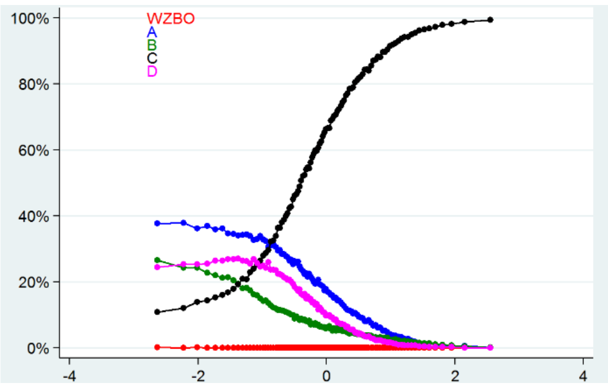
| | |
|---|---|
| A | 18% |
| B | 8% |
| C* | 62% |
| D | 12% |

Także w tym zadaniu przydawało się rozumienie związku między wzorem funkcji a pewnymi jej własnościami.

Uczniowie, którzy wybrali odpowiedź A (18% maturzystów) mogą nie rozumieć pojęcia miejsca zerowego. Otrzymali oni wynik *b* = 4 zakładając prawdopodobnie, że *x* = 0 albo przyjmując, że wyraz wolny w obu wzorach musi być taki sam.

Wybranie odpowiedzi D wskazuje, że uczeń zakończył pracę w połowie zadania, po rozwiązaniu równania – 3x + 4 = 0. Otrzymanie wyniku podanego w odpowiedzi B jest trudne do wytłumaczenia (być może jest to rezultat podzielenia przez siebie współczynników kierunkowych obu funkcji).

**Wykres 8. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 10. w zależności od poziomu umiejętności uczniów**



**Zadanie 11. (0–1)**

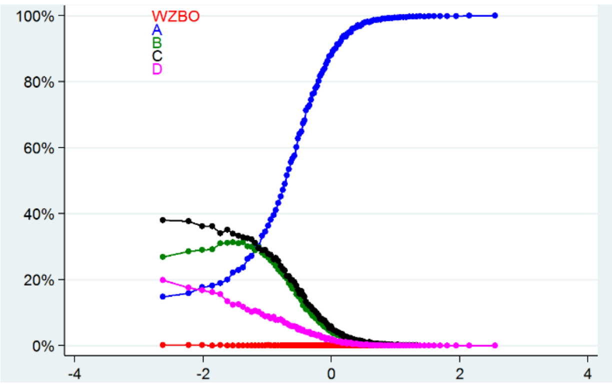
Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x)=x^2+x+c$. Jeżeli $f(3)=4$, to

**A.** $f(1)=-6$ **B.** $f(1)=0$ **C.** $f(1)=6$ **D.** $f(1)=18$

| | |
|---|---|
| A* | 75% |
| B | 10% |
| C | 11% |
| D | 4% |

Ta forma sprawdzania, czy uczniowie rozumieją zapis wzoru funkcji, jest już dobrze znana – podobne zadania pojawiają się na maturze regularnie. Mimo to jedna czwarta maturzystów udzieliła błędnej odpowiedzi. W większości wypadków to najprawdopodobniej skutek błędu rachunkowego. Wskazanie odpowiedzi B mogło się zdarzyć przy błędnym wyliczeniu parametru $c$ na przykład w następujący sposób: $4 = 3 + 3 + c$ (opuszczenie drugiej potęgi). Stąd wychodzi $c = -2$, a potem $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$. Nieco częściej uczniowie wybierali odpowiedź C. $f(1) = 6$ . To mogło się zdarzyć przy prawidłowym wyliczeniu parametru $c = -8$ i błędzie popełnionym przy odejmowaniu $1 + 1 - 8 = 2 - 8$. To bardzo charakterystyczny błąd polegający na odejmowaniu od mniejszej liczby – większej, niezależnie od kolejności ich występowania w odejmowaniu. Jak widać z wykresu częstotliwości wyboru odpowiedzi, w tym zadaniu błąd ten jest dość powszechny wśród 10% najsłabszych uczniów – popełnia go co trzeci z nich.

**Wykres 9. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 11. w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 12. (0–1)**

Ile liczb całkowitych $x$ spełnia nierówność $\frac{2}{7}<\frac{x}{14}<\frac{4}{3}$?

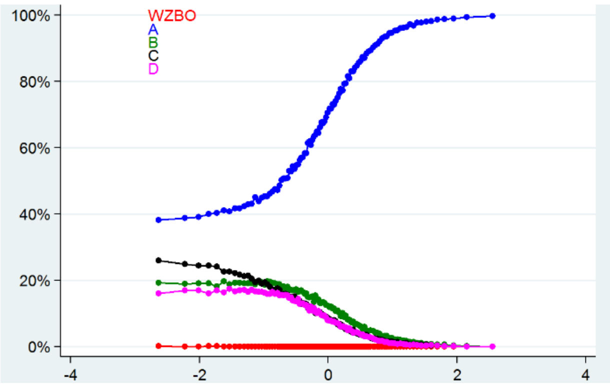
**A.** 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

| | |
|---|---|
| A* | 70% |
| B | 11% |
| C | 10% |
| D | 9% |

Zadanie nie wymagało wiadomości wykraczających poza szkołę podstawową. Tyle że konieczna była taka biegłość w posługiwaniu się ułamkami, której większość uczniów szkół podstawowych jeszcze nie posiada. Rozwiązało je 70% maturzystów. Nawet wśród najsłabszych uczniów aż 40% potrafiło wskazać poprawną odpowiedź.

Wszystkie błędne odpowiedzi – w sumie 30% – wynikały z braku swobody maturzystów w posługiwaniu się prostymi własnościami matematycznymi (w tym wypadku chodziło o porównywanie ułamków zwykłych i rozumienie nierówności ostrej). Jak pokazuje poniższy wykres, trudności te ma ok. 60% najsłabszych uczniów liceów, ale także ok. 30% uczniów przeciętnych.

**Wykres 10. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 12.
w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 13. (0–1)**

W rosnącym ciągu geometrycznym $(a_n)$, określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_4 = 3a_1$. Iloraz $q$ tego ciągu jest równy

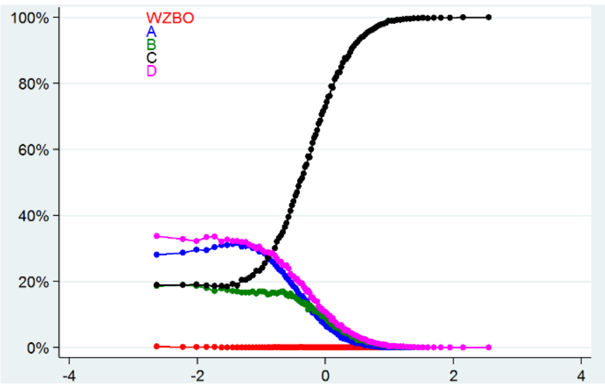
**A.** $q = \frac{1}{3}$ **B.** $q = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **C.** $q = \sqrt[3]{3}$ **D.** $q = 3$

| | |
|---|---|
| A | 11% |
| B | 9% |
| C* | 66% |
| D | 14% |

To typowe zadanie, często pojawiające się na maturze. Trochę zatem niepokoi, że nie udało się go rozwiązać $\frac{1}{3}$ maturzystów. Błędne odpowiedzi A i B były wybierane nieco rzadziej niż, także błędna, odpowiedź D. Zastanawia jednak, że aż 20% uczniów wybrało właśnie A lub B. Gdyby uważnie przeczytali treść zadania i rozumieli własności ciągu geometrycznego, wiedzieliby, że iloraz danego ciągu musi być większy od 1. Być może uczniowie ci odtworzyli z pamięci procedurę rozwiązywania tego typu zadań o ciągach geometrycznych i popełnili w niej błąd rachunkowy.

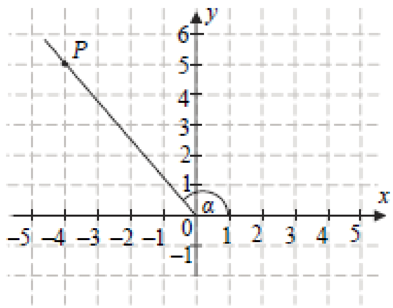
Z poniższego wykresu wynikają dwa ważne wnioski. Po pierwsze nawet wśród najsłabszych uczniów ok. 20% potrafiło rozwiązać to zadanie. Po drugie poważne kłopoty z takimi zadaniami mają uczniowie z dość dużego przedziału umiejętności – od najsłabszych do uczniów z 25 centyla. Oba te wnioski potwierdzają przypuszczenie, że nauczanie rozwiązywania takich zadań sprowadza się do mechanicznego odtwarzania procedur, do uczenia się rozwiązań niemal na pamięć.

**Wykres 11. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 13.
w zależności od poziomu umiejętności uczniów**



**Zadanie 14. (0–1)**

Tangens kąta $\alpha$ zaznaczonego na rysunku jest równy




$P = (-4, 5)$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{4}{5}$

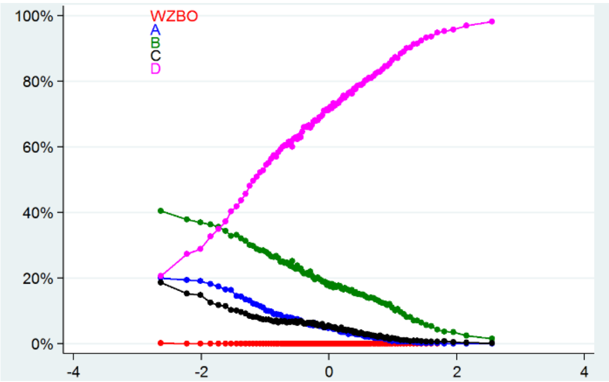
C. $-1$

D. $-\frac{5}{4}$

| | |
|---|---|
| A | 6% |
| B | 19% |
| C | 5% |
| D* | 70% |

Mimo dość wysokiego wyniku w tym zadaniu (70% poprawnych rozwiązań) rezultat nieco rozczarowuje. W końcu w zadaniu trzeba było tylko wiedzieć, co to jest tangens kąta rozwartego, a odpowiedni wzór i niemal taki sam rysunek jak w zadaniu znajduje się w zestawie wzorów, z którego maturzyści mogli korzystać. Prawie 20% uczniów wskazało odpowiedź B. To uczniowie, którzy albo źle pamiętali definicje tangensa (i nie zechcieli sprawdzić w zestawie wzorów), albo dorysowali sobie trójkąt i liczyli tangens jednego z jego kątów. Może to świadczyć o tym, że trygonometria to dla sporej części maturzystów zdających zakres podstawowy głównie trygonometria trójkąta. Te hipotezę potwierdza kształt wykresu częstotliwości odpowiedzi. Linia ilustrująca odpowiedź B startuje z wysokiego pułapu 40% i dość powoli opada. Nawet wśród maturzystów, którzy mieli wynik lepszy od przeciętnego o jedno odchylenie standardowe, jest ok. 10% takich, którzy popełnili ten błąd.

**Wykres 12. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 14. w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 15. (0–1)**

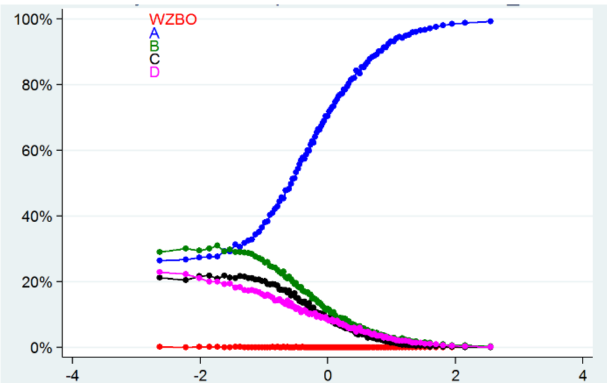
Jeżeli $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ oraz $\mathrm{tg}\,\alpha = 2\sin\alpha$, to

A. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cos\alpha = 1$

| | |
|---|---|
| A* | 67% |
| B | 14% |
| C | 10% |
| D | 9% |

Zadanie w tym samym stopniu wymagało wiadomości z trygonometrii, co umiejętności wykonywania przekształceń algebraicznych. Około $\frac{2}{3}$ uczniów potrafiło je rozwiązać. Martwi jednak duży odsetek tych, którzy wybrali pozostałe odpowiedzi (w sumie 33%), bo każdą z nich było łatwo odrzucić przy odrobinie refleksji i zdrowego rozsądku. Jak pokazuje poniższy wykres takiej refleksji zabrakło nie tylko najsłabszym uczniom.

**Wykres 13. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 15.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**



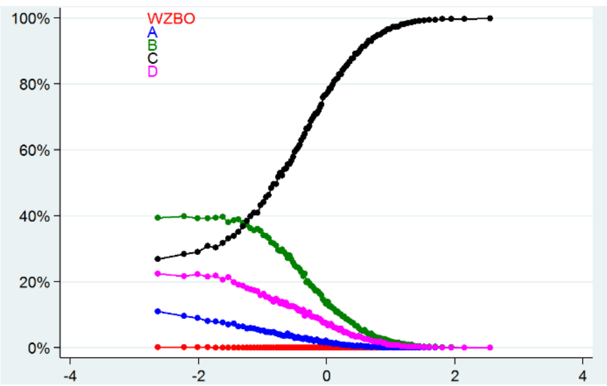

**Zadanie 16. (0–1)**
Miara kąta wpisanego w okrąg jest o $20^\circ$ mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Wynika stąd, że miara kąta wpisanego jest równa

**A.** $5^\circ$ **B.** $10^\circ$ **C.** $20^\circ$ **D.** $30^\circ$

| | |
|---|---|
| A | 3% |
| B | 17% |
| C* | 72% |
| D | 8% |

Cała trudność zadania oparta była na skomplikowanej formie podania prostej informacji. Mimo to uczeń, który wykonał rysunek nie powinien mieć kłopotów. Najczęściej pojawiająca się błędna odpowiedź B jest wynikiem mechanicznego skojarzenia, że gdy mowa o kątach wpisanych i środkowych, to jeden z nich jest dwa razy większy od drugiego. Uczniowie ci nieuważnie przeczytali tekst zadania. W ten sposób postąpiło ogółem 17% maturzystów, a wśród słabszych uczniów aż 40%. Ci ostatni wybierali tę błędną odpowiedź częściej niż poprawną.

**Wykres 14. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 16.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 17. (0–1)**
Pole rombu o obwodzie 8 jest równe 1. Kąt ostry tego rombu ma miarę $\alpha$. Wtedy

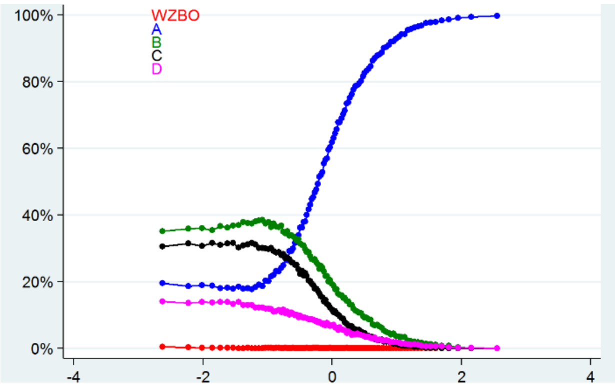
**A.** $14^\circ < \alpha < 15^\circ$ **B.** $29^\circ < \alpha < 30^\circ$ **C.** $60^\circ < \alpha < 61^\circ$ **D.** $75^\circ < \alpha < 76^\circ$

| | |
|---|---|
| A* | 59%% |
| B | 20% |
| C | 14% |
| D | 7% |

To nietypowe rodzaj zadania, niemal nie pojawia się na egzaminach. Nie trzeba w nim niczego dokładnie policzyć, a tylko oszacować pewną wielkość.

Do rozwiązania zadania potrzebna była wartość jakiejkolwiek funkcji trygonometrycznej kąta α. Można było skorzystać ze wzoru na pole równoległoboku $P = ab\sin\alpha$ albo obliczyć $\sin\alpha$ w inny sposób. Trzeba było jeszcze umieć oszacować (lub odczytać z tablic), jaki jest kąt, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$. W taki „inżynierski" sposób potrafiło posłużyć się w tym zadaniu procedurami matematycznymi mniej niż 60% uczniów. Co piąty maturzysta wskazał odpowiedź B. Można przypuszczać, że część z tych uczniów wiedziała, że $\sin 30° = \frac{1}{2}$, więc sądzili, że szukany kąt jest tylko trochę mniejszy od 30˚. Jak bardzo pogubili się w tym nietypowym zadaniu słabsi i przeciętni uczniowie, mówi wykres częstotliwości wyboru odpowiedzi. Wszystkie linie reprezentujące błędne odpowiedzi długo biegną niemal poziomo, a linia poprawnej odpowiedzi długo nie przekracza 20%.

**Wykres 15. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 17. w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 18. (0–1)**

Prosta $l$ o równaniu $y = m^2x + 3$ jest równoległa do prostej $k$ o równaniu $y = (4m-4)x - 3$. Zatem

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = -2-2\sqrt{2}$ D. $m = 2+2\sqrt{2}$

| | |
|---|---|
| A* | 77%% |
| B | 7% |
| C | 7% |
| D | 9% |

Oprócz sprawdzenia, czy uczeń rozumie związek miedzy równoległością prostych o ich współczynnikami kierunkowymi, dołożono w zadaniu jeszcze pewne trudności rachunkowe. Część uczniów, którzy wskazali błędne odpowiedzi, prawdopodobnie rozwiązywali równanie kwadratowe $m^2 = 4m - 4$ i popełniła przy tym błędy rachunkowe. Uczniowie, którzy wskazali odpowiedź C lub D, zapewne na dodatek równanie to rozwiązywali, stosując wzory i wyróżnik trójmianu, mimo że łatwo zauważyć, że jest ono równoważne równaniu $(x-2)^2 = 0$.

**Zadanie 19. (0–1)**

Proste o równaniach: $y = 2mx - m^2 - 1$ oraz $y = 4m^2x + m^2 + 1$ są prostopadłe dla

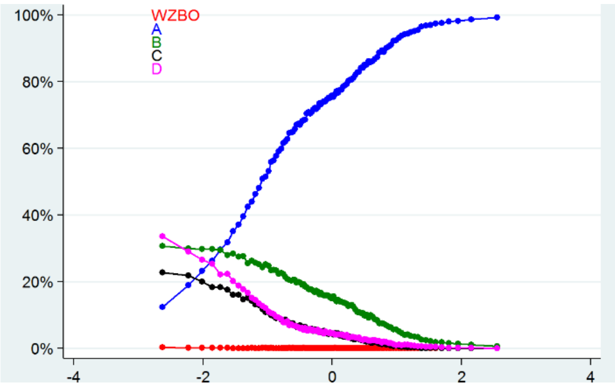
A. $m = -\frac{1}{2}$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

| | |
|---|---|
| A* | 73% |
| B | 15% |
| C | 6% |
| D | 6% |

Podobnie jak w poprzednim zadaniu uczniowie mogli podstawiać kolejne propozycje wartości parametru m i sprawdzać, jakie są współczynniki kierunkowe otrzymanych prostych. Mogli też rozwiązać odpowiednie równanie. Najczęściej pojawiający się błąd (odpowiedź B) to efekt błędu rachunkowego lub pomylenia warunków równoległości i prostopadłości, mimo że warunki te podane są w zestawie wzorów dostępnym podczas egzaminu.

Błąd ten popełniało nawet 30% słabych uczniów. Popełniali go jednak nie tylko najsłabsi. Widać to dobrze na poniższym wykresie – linia odpowiadająca odpowiedzi B opada bardzo powoli.

**Wykres 16. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 19.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 20. (0–1)**

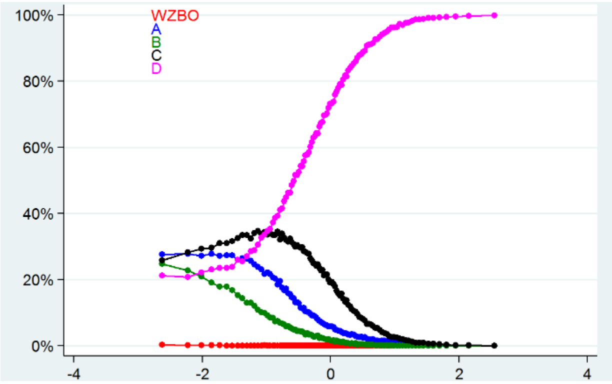
Dane są punkty $M=(-2,1)$ i $N=(-1,3)$. Punkt $K$ jest środkiem odcinka $MN$. Obrazem punktu $K$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt

A. $K'=\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ B. $K'=\left(2,\frac{3}{2}\right)$ C. $K'=\left(\frac{3}{2},2\right)$ D. $K'=\left(\frac{3}{2},-2\right)$

| | |
|---|---|
| A | 9% |
| B | 4% |
| C | 18% |
| D* | 68% |

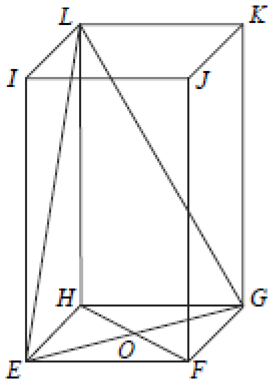
Niemal nie sposób pomylić się w tym zadaniu, gdy wykona się rysunek. Ponad 30% błędnych odpowiedzi świadczy o tym, że znaczna część uczniów oparła swoje rozwiązanie wyłącznie na rachunkach i wzorach, które pamiętali lepiej lub gorzej. Najczęstszy błąd to odpowiedź C. Pojawiał się on dwa razy częściej niż kolejny rodzaj błędu (odpowiedź A). Do błędów rachunkowych i mechanicznego stosowania wzorów dołożyło się tu zapewne pomylenie symetrii środkowej z osiową. Jak silne jest zjawisko algorytmicznego rozwiązywania tego typu problemów widać z wykresu. Linia reprezentująca błędną odpowiedź C przez jakiś czas rośnie wraz ze wzrostem umiejętności uczniów

**Wykres 17. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 20.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




| | |
|---|---|
| A* | 74% |
| B | 10% |
| C | 4% |
| D | 11% |

**Zadanie 21. (0–1)**
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym *EFGHIJKL* wierzchołki *E*, *G*, *L* połączono odcinkami (tak jak na rysunku).



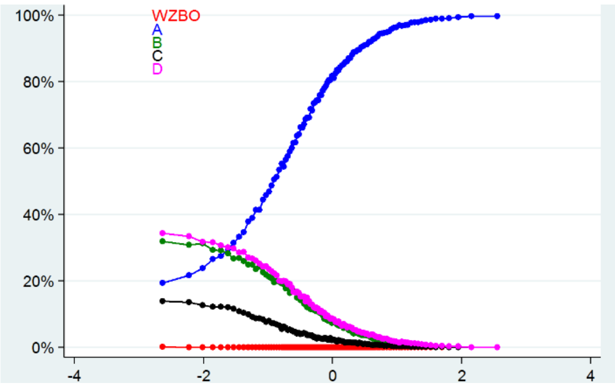

Wskaż kąt między wysokością *OL* trójkąta *EGL* i płaszczyzną podstawy tego graniastosłupa.

**A.** $\sphericalangle HOL$ **B.** $\sphericalangle OGL$ **C.** $\sphericalangle HLO$ **D.** $\sphericalangle OHL$

Zadanie okazało się niezbyt trudne – poprawnie rozwiązało je prawie $\frac{3}{4}$ maturzystów. Jednak fakt, że 26% maturzystów nie potrafi odczytać literowych oznaczeń kąta i wskazać go w prostopadłościanie, musi budzić niepokój. Stosunkowo najmniej wskazań (4%) padło na odpowiedź C. Uczniowie, którzy ją wybrali, w ogóle nie uwzględnili płaszczyzny trójkąta EGL. Po ok 10% uczniów wskazało błędne odpowiedzi B i D. Są to uczniowie, który mają słabo wyrobioną wyobraźnię przestrzenną (a może nawet szerzej – wyobraźnię geometryczną) lub nie rozumieją oznaczeń kątów. Są to nie tylko najsłabsi uczniowie. Wśród tych najsłabszych (z najsłabszymi wynikami całego egzaminu) każda z obu błędnych odpowiedzi B i D była częściej wybierana niż odpowiedź poprawna, ale także ok. 25% uczniów o wyniku z całej matury równym średniej dla całej populacji nie potrafiło rozwiązać tego zadania.

Dwie różne umiejętności decydowały o sukcesie ucznia w tym zadaniu: dostrzeganie położenia odcinków w figurach przestrzennych i umiejętność przebicia się przez bardzo formalny język, w którym sformułowano zadanie. Takie zestawienie nie daje możliwości oceny, z nauczaniem której z tych umiejętności jest większy problem.

**Wykres 18. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 21.
w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




| | |
|---|---|
| A | 8% |
| B* | 81% |
| C | 9% |
| D | 2% |

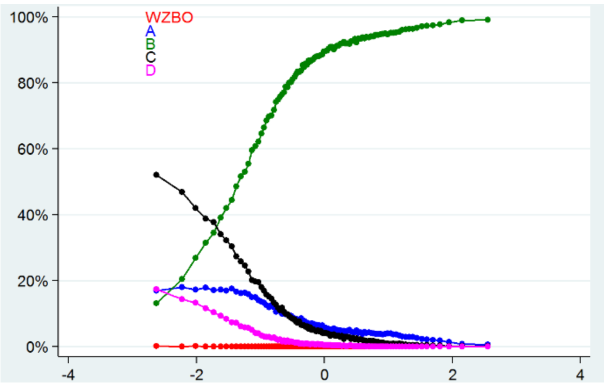
**Zadanie 22. (0–1)**

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku długości $6$. Objętość tego stożka jest równa

A. $27\pi\sqrt{3}$ B. $9\pi\sqrt{3}$ C. $18\pi$ D. $6\pi$

Zadanie jest dość typowe i zapewne niemal każdy maturzysta spotkał się z nim na lekcjach matematyki. Rozwiązało je ponad 80% uczniów, a więc było dla nich łatwe. Pozostali albo źle pamiętali wzór na objętość stożka – zapomnieli o $\frac{1}{3}$ – i wybierali A, albo za wysokość stożka przyjęli jego tworzącą i wybierali C, albo popełnili oba te błędy i wybierali D. Wśród najsłabszych uczniów dominowało wybieranie odpowiedzi C (częściej nawet wybieranej niż odpowiedź prawidłowa), czyli błąd wynikający z braku wyobraźni geometrycznej. Wybieranie odpowiedzi A, użycie złego wzoru, było nieco rzadsze, ale ten błąd dużo wolniej zanikał wraz ze wzrostem umiejętności uczniów. Warto dodać, że wzór na objętość stożka maturzyści mogli znaleźć w zestawie wzorów, z którego mogli korzystać na egzaminie.

**Wykres 19. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 22.
w zależności od poziomu umiejętności uczniów**



**Zadanie 23. (0–1)**

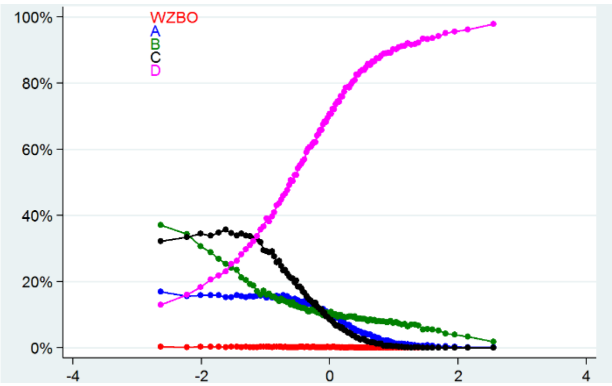
Każda krawędź graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość równą $8$. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

A. $\frac{8^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$ B. $8^2\cdot\sqrt{3}$ C. $\frac{8^2\sqrt{6}}{3}$ D. $8^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$

| | |
|---|---|
| A | 9% |
| B | 12% |
| C | 13% |
| D* | 66% |

Jako zadanie zamknięte to zadanie miało dla uczniów dodatkową trudność: podane propozycje odpowiedzi były zapisane w formie, której uczeń nie musiał otrzymać jako wynik swoich obliczeń. Musiał wtedy jeszcze dodatkowo przekształcić wyrażenia arytmetyczne, co zapewne w wielu wypadkach generowało błędy. Ponad jedna trzecia maturzystów nie rozwiązała tego zadania. Wybór odpowiedzi A (jedna trzecia poprawnej wartości) to najprawdopodobniej wynik braku umiejętności przekształcania takich wyrażeń. Ci, którzy wybrali odpowiedź B (12% zdających), obliczali pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego zamiast graniastosłupa. Tę odpowiedź wybierali nie tylko uczniowie najsłabsi. Także około 10% uczniów, którzy z całego egzaminu osiągnęli dobry wynik, popełniło ten błąd. Pojawiający się $\sqrt{6}$ w odpowiedzi C (13% uczniów ją wskazało) mógł być otrzymany w wyniku próby obliczenia objętości tego ostrosłupa lub być wynikiem błędów rachunkowych.

**Wykres 20. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 23.**
**w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 24. (0–1)**

Średnia arytmetyczna zestawu danych:

$$2, 4, 7, 8, 9$$

jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych:

$$2, 4, 7, 8, 9, x.$$

Wynika stąd, że

A. $x=0$ B. $x=3$ C. $x=5$ D. $x=6$

| | |
|---|---|
| A | 8% |
| B | 1% |
| C | 2% |
| D* | 89% |

To najłatwiejsze zadanie w całym zestawie. Obliczanie średniej arytmetycznej i jej podstawowe własności to tematy znane uczniom jeszcze z gimnazjum. Zdecydowana większość tych, którzy popełnili błąd, nie rozumiała, że gdy zwiększymy liczbę danych, to przy liczeniu ich średniej arytmetycznej, musimy dzielić przez większą liczbę.

**Zadanie 25. (0–1)**

W każdym z trzech pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga – niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Niech $p$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie z trzech wylosowanych kul będą czerwone. Wtedy

A. $p=\frac{1}{4}$ B. $p=\frac{3}{8}$ C. $p=\frac{1}{2}$ D. $p=\frac{2}{3}$

| | |
|---|---|
| A | 20% |
| B* | 47% |
| C | 15% |
| D | 18% |

W tym zadaniu uczniowie, którzy uczyli się według zakresu rozszerzonego, mieli łatwiejszy problem do pokonania, niż ci z zakresu podstawowego, ponieważ narzędzia, które poznali i mogli tu stosować, bardzo ułatwiały rozwiązanie.

Zadanie okazało się trudne. Mniej niż połowa maturzystów wskazała poprawną odpowiedź. Błędy popełnione przez uczniów świadczą o mechanicznym podejściu do rozwiązywania problemów matematycznych.

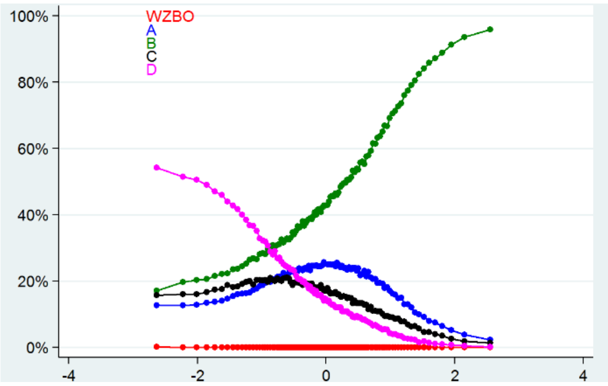
Odpowiedź A mogła być wynikiem takiego sposobu myślenia: wylosowanie czerwonej kuli z pojemnika jest równe $\frac{1}{2}$ , wylosowanie kolejnej także $\frac{1}{2}$, więc wylosowanie dwóch jest równe $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Tę odpowiedź wskazywało nawet 20% uczniów, którzy osiągnęli bardzo dobre wyniki z całego egzaminu. Krzywa, która na poniższym wykresie ilustruje częstotliwość wyboru, długo rośnie wraz ze wzrostem umiejętności uczniów.

Odpowiedź C wynikać mogła z rozumowania: z sześciu kul losujemy trzy, więc prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2}$ . Uczeń mógł też myśleć tak: stosunek kul niebieskich do czerwonych wśród wylosowanych kul jest równy $\frac{1}{2}$ . To odpowiedź o rozkładzie wybieralności zbliżonym do rozkładu odpowiedzi A, tylko rzadziej od niej wybierana przez uczniów średnich i dobrych.

Odpowiedź D może być wynikiem takiego toku myślenia: skoro dwie z trzech wylosowanych kul mają być czerwone, to prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{3}$ . To najbardziej popularna odpowiedź wśród uczniów słabych (ponad połowa najsłabszych ją wybierała), ale szybko tracąca popularność wraz ze wzrostem umiejętności uczniów.

**Wykres 21. Częstotliwość wyboru odpowiedzi w zadaniu 23. w zależności od poziomu umiejętności uczniów**




**Zadanie 26. (0–2)**

Rozwiąż nierówność $2x^2-4x>(x+3)(x-2)$.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 22% |
| 1 pkt | 20% |
| 2 pkt | 58% |

Rozwiązywanie nierówności kwadratowych to zadanie, w którym trzeba się wykazać umiejętnością zastosowania pewnej, dość złożonej, algorytmicznej procedury. Takie zadanie pojawia się regularnie na maturze od roku 2010, a więc zdający na pewno się do niego przygotowują. Mimo to od lat wynik maturalny jest podobny do tegorocznego. Tym razem nierówność kwadratową w pełni potrafiło rozwiązać 58% maturzystów (zdobyli 2 punkty). Kolejne 20% popełniło w rozwiązaniu błąd rachunkowy lub potrafiło jedynie obliczyć rozwiązania równania kwadratowego (zdobyli 1 punkt).

Tegoroczne zadanie kryło w sobie dodatkową pułapkę na słabych i przeciętnych uczniów. Forma zapisu nierówności wymagała uporządkowania i niektórzy uczniowie mogli się skusić na przekształcenie jej do postaci $2x(x-2) > (x+3)(x-2)$, a następnie podzielenie obu stron przez $x-2$.

**Zadanie 27. (0–2)**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ i dla każdej liczby rzeczywistej $y$ prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

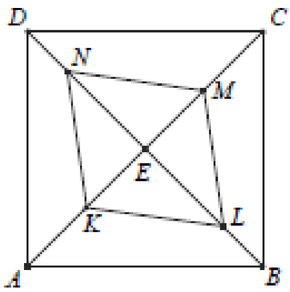
| | |
|---|---|
| 0 pkt | 79% |
| 1 pkt | 6% |
| 2 pkt | 15% |

Zadania na dowodzenie pojawiają się równie regularnie na maturze jak nierówności kwadratowe. Co roku maturzyści słabo sobie z nimi radzą, ale przez te kilka lat widoczny jest postęp w wynikach i w sposobach zapisu rozwiązań. W tym roku 15% maturzystów potrafiło przeprowadzić dowód tej nierówności kwadratowej z dwiema niewiadomymi. Do matury na poziomie rozszerzonym przystąpiło ok. 28% maturzystów. To oznacza, że około połowa z nich sobie z tym dowodem nie poradziła. Jak trudny był ten problem dla maturzystów, świadczy fakt, że nawet wśród uczniów bardzo dobrych – z 85 centyla – mniej niż 40% w pełni je zrobiło.

**Zadanie 28. (0–2)**

Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne $AC$ i $BD$ przecinają się w punkcie $E$. Punkty $K$ i $M$ są środkami odcinków – odpowiednio – $AE$ i $EC$. Punkty $L$ i $N$ leżą na przekątnej $BD$ tak, że $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$ i $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola kwadratu $ABCD$ jest równy $1:3$.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 65% |
| 1 pkt | 5% |
| 2 pkt | 30% |




W kolejnym zadaniu na dowodzenie należało uzasadnić pewną ładną i nieoczywistą własność geometryczną. Potrafiła to zrobić prawie jedna trzecia maturzystów. Niewielu uczniów rozwiązało to zadanie częściowo i otrzymało 1 punkt, a można było go zdobyć, gdy uczeń zauważył ważną dla dowodu własność, ale nie potrafił jej wykorzystać do podania pełnej argumentacji lub gdy w uzasadnieniu rozważał nie dowolny kwadrat, a pewien kwadrat o przyjętych przez niego wymiarach. Wynik nie jest wysoki (warto pamiętać, że 28% piszących to ci, którzy zdawali także maturę na poziomie rozszerzonym), ale wyraźnie widać postęp w podejściu uczniów, a więc także i nauczycieli, do zadań wymagających dowodzenia porównaniu z poprzednimi latami.

**Zadanie 29. (0–2)**

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 3$ w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 34% |
| 1 pkt | 30% |
| 2 pkt | 36% |

To kolejne zadanie dotyczące funkcji kwadratowej. Wyniki potwierdzają, że wykonywanie złożonych procedur sprawia maturzystom spore problemy. W tym wypadku była to procedura nie tak często ćwiczona w szkołach, jak nierówności kwadratowe, więc i wyniki maturzystów są dużo gorsze. Zadanie potrafiło w pełni rozwiązać nieco ponad $\frac{1}{3}$ maturzystów. Kolejne 30% z nich potrafiło tylko albo podać współrzędne wierzchołka, albo obliczyć wartości funkcji na krańcach danego przedziału.

**Zadanie 30. (0–2)**

W układzie współrzędnych są dane punkty $A=(-43,-12)$, $B=(50,19)$. Prosta $AB$ przecina oś $Ox$ w punkcie $P$. Oblicz pierwszą współrzędną punktu $P$.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 51% |
| 1 pkt | 17% |
| 2 pkt | 32% |

Współrzędne punktów podanych w zadaniu dobrano tak, że trudno było posłużyć się rysunkiem. Uczniowie musieli polegać na rachunkach, umiejętnościach konstruowania strategii obliczeń i wyobraźni geometrycznej. Niewielu sobie z tym poradziło, zaledwie 32%. Kolejne 17% popełniło błąd rachunkowy. Ponad połowa maturzystów nie potrafiła zrobić pierwszego kroku do rozwiązania zadania, czyli zapisać równania prostej przechodzącej przez dane dwa punkty. Wzór na równanie takiej prostej znajdował się w dostępnym maturzystom zestawie wzorów, należy zatem przypuszczać, że przynajmniej część z nich nie wiedziała, że od tego równania trzeba zacząć. Wśród tych, którzy otrzymali 0 punktów, byli nie tylko słabi uczniowie. W tej grupie znalazło się około 40% spośród tych, którzy z całego egzaminu miało wynik równy średniemu.

**Zadanie 31. (0–2)**

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 55% |
| 1 pkt | 15% |
| 2 pkt | 30% |

W zadaniu należało się wykazać umiejętnością zastosowania dobrze znanego uczniom narzędzia matematycznego w sytuacji standardowej dla szkolnej matematyki. Około 45% uczniów wiedziało, co należy w tym zadaniu zrobić (zdobyli jakieś punkty), ale część z nich pogubiła się w rachunkach.

Jest to zadanie tekstowe podobne w formie do wielu zadań, z którymi uczniowie spotkali się w gimnazjum. Może dziwić, że rozwiązało je tylko 30% maturzystów (przypominamy, że 28% maturzystów to ci, którzy zdawali także na poziomie rozszerzonym). Kolejne 15% uczniów zdobyło 1 punkt, czyli zapisało układ równań, ale nie potrafiło go poprawnie rozwiązać. Układu równań nie potrafiło ułożyć 60% spośród tych, którzy z całego egzaminu mieli wynik równy średniemu wynikowi.

**Zadanie 32. (0–4)**

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $16$. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 30% |
| 1 pkt | 28% |
| 2 pkt | 4% |
| 3 pkt | 6% |
| 4 pkt | 32% |

To typowe zadanie stereometryczne powiązane z trygonometrią. Główną trudność stanowi w nim to, że w drodze do rozwiązania trzeba wykonać kilka kroków, a więc konieczne jest zaplanowanie właściwej strategii rozwiązania.

Potrafiła je rozwiązać mniej niż $\frac{1}{3}$ maturzystów.

Niemal po tyle samo uczniów otrzymała 0, 1 i 4 punkty. Żeby zdobyć jeden punkt wystarczyło zrobić rysunek do zadania i zaznaczyć na nim kąt miedzy przekątną prostopadłościanu i jego podstawą. Traciło się jeden punkt (czyli zdobywało 3), gdy popełniło się błąd rachunkowy lub obliczyło tylko długość krawędzi podstawy. Dwa punkty można było zdobyć za obliczenie długości przekątnej podstawy.

O wykazaniu myślenia strategicznego w tym zadaniu można zatem mówić u ok. 40% maturzystów.

Zadanie rozwiązała połowa tych uczniów, którzy z całego egzaminu uzyskali wynik równy średniemu wynikowi.

**Zadanie 33. (0–4)**

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

| Rodzaj kupionych biletów | Liczba osób |
|---|---|
| ulgowe | 76 |
| normalne | 41 |

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 38% |
| 1 pkt | 15% |
| 2 pkt | 6% |
| 3 pkt | 3% |
| 4 pkt | 38% |

Do rozwiązania zadania nie potrzebne było uważne przeczytanie dość długiego tekstu i rozumienie pojęcia prawdopodobieństwa w zasadzie na poziomie gimnazjalnym. Główna trudność to analiza zależności między podanymi informacjami.

Wystarczyło podać, ilu ankietowanych kupiło bilety ulgowe (lub normalne), by zdobyć 1 punkt. Można więc powiedzieć, że te 15% maturzystów, którzy tyle zdobyli to uczniowie potrafiący analizować dane, ale nie rozumiejący pojęcia prawdopodobieństwa.

**Zadanie 34. (0–5)**

W nieskończonym ciągu arytmetycznym $(a_n)$, określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy $a_1$, $a_3$, $a_k$ ciągu $(a_n)$, w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny $(b_n)$. Oblicz $k$.

| | |
|---|---|
| 0 pkt | 49% |
| 1 pkt | 14% |
| 2 pkt | 9% |
| 3 pkt | 7% |
| 4 pkt | 2% |
| 5 pkt | 19% |

Kolejne zadanie, w którym trzeba było się wykazać umiejętnością stosowania długiej procedury. Tym razem trzeba było także znać pojęcia związane z ciągami arytmetycznym i geometrycznym i biegle umieć je powiązać. Typ zadania bardzo często pojawiający się na egzaminie maturalnym, zwłaszcza przed rokiem 2010.

Za zadanie można było zdobyć aż 5 punktów (czyli 10% wszystkich możliwych). Prawie połowa maturzystów nie otrzymała za nie żadnego punktu, a tylko 19% rozwiązało je w pełni poprawnie.

Z zadaniem mieli kłopoty nawet najlepsi uczniowie. Aż trzydzieści procent uczniów z 90 centyla nie potrafiło go rozwiązać.

# 3. Podsumowanie i wnioski

Pozytywne skutki powrotu matematyki jako przedmiotu obowiązkowego na maturze są niepodważalne. Warto się jednak jeszcze raz zastanowić nad rolą matury obowiązkowej z matematyki i arkusz maturalny konstruować tak, by tę rolę jak najlepiej pomagał realizować.

Analizy kolejnych arkuszy maturalnych mogą dostarczyć ważnych informacji. Takie analizy warto robić w sposób ciągły, by wniosków nie wyciągać na podstawie przykładu z jednego tylko roku.

Egzamin maturalny na poziomie podstawowym w założeniu ma być egzaminem podsumowującym naukę matematyki w ciągu całego okresu edukacji dla wszystkich maturzystów. Także dla tych, którzy nie wybierają studiów, a później zawodu, wymagających zaawansowanych technik matematycznych. Z niniejszej analizy zadań matury 2015 wynika, że przemyślenia wymaga sposób weryfikacji na maturze osiągnięcia głównych celów nauczania matematyki opisanych w wymaganiach ogólnych podstawy programowej. Główne wnioski wynikające z tej analizy są następujące:

- Warto zmienić w arkuszach maturalnych proporcję liczby zadań wymagających umiejętności algorytmicznych i zadań wymagających rozumowania. Te ostatnie nie muszą się przecież realizować w arkuszu maturalnym dla zakresu podstawowego wyłącznie jako zadania na dowodzenie. Nie oznacza to oczywiście, że z zadań na dowodzenie należy zrezygnować.
- W arkuszu z 2015 r. pojawiło się sporo zadań, które były kopiami zadań z ubiegłych egzaminów. Warto unikać takich powtórzeń. Zjawisko to wzmacnia szkodliwy pomysł, że do matury można się przygotować, rozwiązując wyłącznie zadania z ubiegłych lat.
- W kilku zadaniach arkusza matury 2015 pojawiły się pułapki, w które uczniowie wpadali przez nieuwagę lub w wyniku błędów dotyczących szczegółów (jak w zadaniu 1. czy 8.). Należy rozważyć, czy jest to dobry pomysł na egzamin powszechny. Takie zadania na obowiązkowej maturze mogą dawać niewłaściwy sygnał, jakiej matematyki i w jaki sposób należy uczyć na poziomie podstawowym.
- Do rozwiązania kilu zadań potrzebna była tylko znajomość podstawowej definicji lub wzoru. Niepokoi, że nawet wtedy, gdy potrzebne informacje maturzyści mogli znaleźć w oficjalnym zestawie wzorów, spory ich odsetek nie umiał z tych informacji skorzystać.
- W wynikach wielu zadań maturalnych widoczny jest efekt bardzo powierzchownego nauczania matematyki w znacznym odsetku szkół. Maturzyści mają duże kłopoty w zadaniach, w których trzeba powiązać wiadomości z różnych działów lub zastosować proste techniki matematyczne w zadaniach, które nie są dokładnie takie same, jak te, które już wcześniej rozwiązywali. Szczególnie dramatyczny jest wynik w zadaniu 3. o odsetkach bankowych i podatkach (mniej niż połowa maturzystów potrafiła je rozwiązać).
- Maturzyści dobrze sobie radzili z zadaniami, w których trzeba było odtworzyć proste procedury. Jeśli procedury były bardziej złożone (jak w zadaniu 26. o nierówności kwadratowej), spora cześć maturzystów się gubiła. To zjawisko należy traktować jako niepokojący sygnał o sposobie nauczania matematyki w znacznej części liceów, to znaczy o nastawieniu na nauczanie odtwarzania algorytmów. Potwierdzają to wyniki matury w zadaniach pozornie nietrudnych, ale wymagających rozumienia podstawowych pojęć matematycznych (np. w zad. 5. czy 7.)

Nauczanie wykonywania kolejnych procedur ma sens tylko wtedy, gdy procedury te są jedynie pewnym skrótem do rozwiązywania problemów, które uczeń rozumie. Nauczanie wyłącznie algorytmiczne na poziomie podstawowym nie ma sensu, albowiem obejmuje uczniów, którzy w przeważającej części po zdaniu matury nie będą mieć stałej styczności z matematyką. Najpóźniej po kilku latach wszystkie procedury ulegną więc i tak zapomnieniu. W wypadku tych uczniów ważniejsza jest praca nad zaradnością matematyczną, czyli umiejętnością wykorzystania poznanych własności matematycznych. W omawianym zestawie zadań maturalnych pojawiło się kilka zadań, które mogą dać sygnał nauczycielom, jakimi zadaniami taką zaradność można kształtować (np. zad. 17.