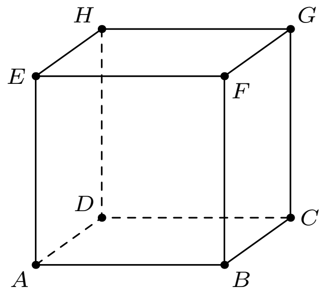
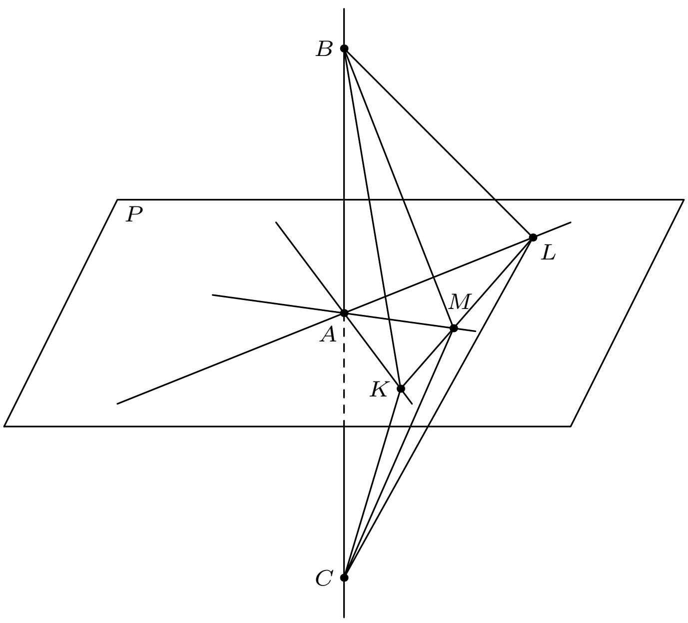
Zadanie 28. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.



Na początku przypomnijmy kilka pojęć i twierdzeń geometrii przestrzennej. Przypuśćmy, że prosta BC przebija płaszczyznę P w punkcie A. Mówimy, że prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny P, jeśli jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie i przechodzącej przez punkt A.

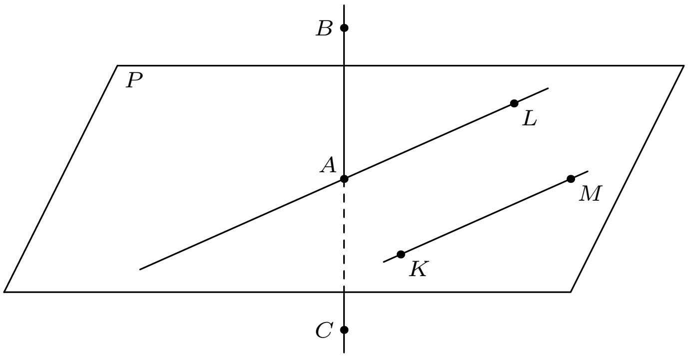
Twierdzenie 1. Przypuśćmy, że prosta BC przebija płaszczyznę P w punkcie A oraz $AB = AC$. Przypuśćmy następnie, że punkty współliniowe K, L i M leżą na płaszczyźnie P oraz prosta BC jest prostopadła do prostych AK i AL. Wówczas prosta BC jest prostopadła do prostej AM.

Dowód. Połączmy punkty B i C z punktami K, L i M (zobacz rysunek).



Wówczas trójkąty ABK i ACK są przystające na podstawie cechy przystawania BKB (mają wspólny bok AK, równe boki AB i AC oraz równe kąty proste BAK i CAK). Zatem $BK = CK$. Podobnie trójkąty ABL i ACL są przystające, a więc $BL = CL$. Stąd wynika, że trójkąty BKL i CKL są przystające na podstawie cechy przystawania BBB. Zatem $\measuredangle BKM = \measuredangle CKM$. Teraz zauważamy, że trójkąty BKM i CKM są przystające na podstawie cechy przystawania BKB. A więc $BM = CM$. Wreszcie stąd wynika, że trójkąty BAM i CAM są przystające (na podstawie cechy przystawania BBB). Zatem $\measuredangle BAM = \measuredangle CAM$. Ponieważ są to kąty przyległe, więc są proste. Udowodniliśmy zatem, że proste BC i AM są prostopadłe. To kończy dowód.

Zauważmy następnie, że jeśli prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny P, to jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie. Nie jest więc konieczne, by prosta leżąca na płaszczyźnie P przechodziła przez punkt A. Na poniższym rysunku prosta BC jest prostopadła do prostej AL, zaś prosta AL i KM są równoległe. Zatem prosta BC jest prostopadła do prostej KM.



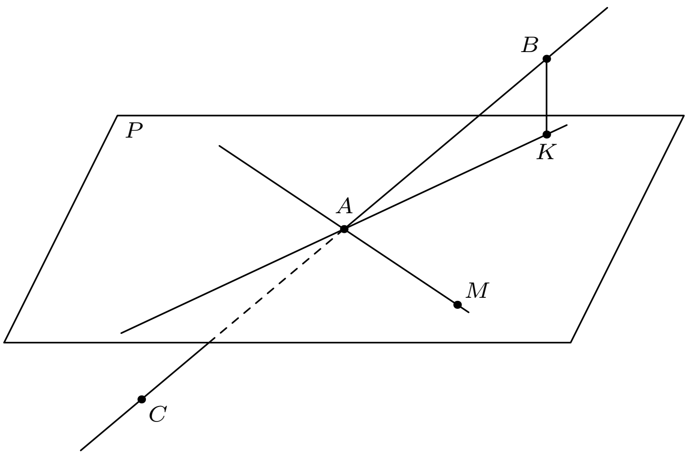
Twierdzenie 1 może być zatem sformułowane nieco ogólniej:

Twierdzenie 2. Przypuśćmy, że prosta BC przebija płaszczyznę P oraz jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych leżących na płaszczyźnie P. Wówczas prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny P.

Udowodnimy następnie tzw. twierdzenie o trzech prostopadłych.

Twierdzenie 3. Przypuśćmy, że prosta BC przebija płaszczyznę P w punkcie A. Załóżmy następnie, że prosta BC nie jest prostopadła do płaszczyzny P. Niech punkt K będzie rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę P; zatem prosta AK jest rzutem prostej BC na płaszczyznę P. Niech wreszcie punkt M leży na płaszczyźnie P. Wówczas prosta AM jest prostopadła do prostej BC wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej AK.

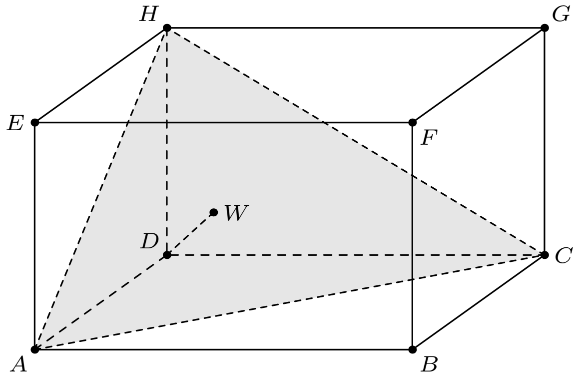
Dowód. Zauważmy najpierw, że prosta BK jest prostopadła do płaszczyzny P, a więc w szczególności jest prostopadła do prostej AM (zobacz rysunek).



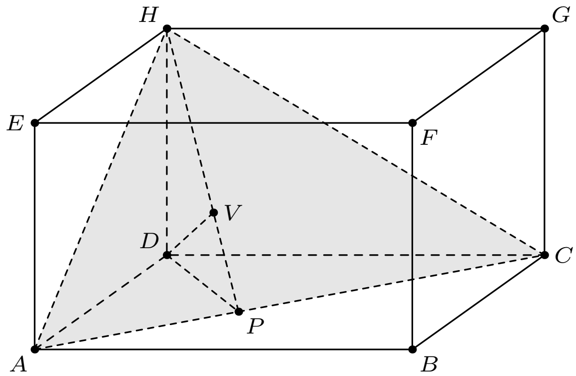
Załóżmy teraz, że proste BC i AM są prostopadłe. Wówczas prosta AM jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych leżących na płaszczyźnie ABK, mianowicie do prostych BC i BK. Zatem jest prostopadła do prostej AK. Odwrotnie, jeśli prosta AM jest prostopadła do prostej AK, to jest prostopadła do nierównoległych prostych AK i BK. Jest zatem prostopadła do płaszczyzny ABK, a więc w szczególności do prostej BC. To kończy dowód.

W rozwiązaniu zadania 28 skorzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4. Przypuśćmy, że dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek). Przypuśćmy następnie, że z wierzchołka D prowadzimy wysokość DW ostrosłupa $ACHD$ (opuszczoną na podstawę ACH). Wówczas punkt W jest ortocentrum trójkąta ACH.



Dowód. Poprowadźmy z wierzchołka H wysokość HP trójkąta ACH. Połączmy punkt P z punktem D i następnie poprowadźmy z wierzchołka D wysokość DV trójkąta DPH (zobacz rysunek).



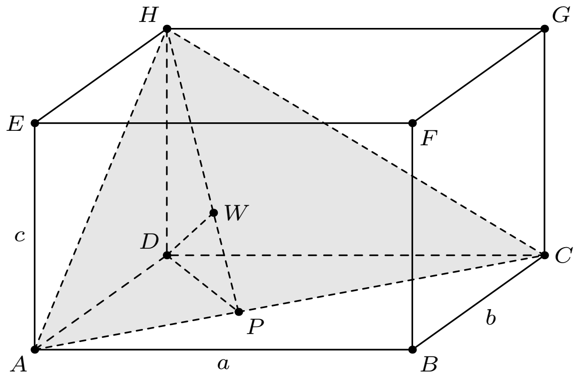
Prosta DP jest rzutem prostokątnym prostej HP na płaszczyznę podstawy dolnej $ABCD$ prostopadłościanu. Ponadto proste HP i AC są prostopadłe. Zatem z twierdzenia o trzech prostopadłych proste DP i AC też są prostopadłe (czyli że odcinek DP jest wysokością trójkąta ACD). Stąd wynika, że prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny DPH; w szczególności jest prostopadła do prostej DV. To znaczy, że prosta DV jest prostopadła do nierównoległych prostych AC i HP leżących na płaszczyźnie ACH, a więc jest prostopadła do tej płaszczyzny. To dowodzi, że punkt V pokrywa się z punktem W, a więc punkt W leży na wysokości HP trójkąta ACH. W analogiczny sposób dowodzimy, że punkt W leży na pozostałych dwóch wysokościach, a więc jest ortocentrum trójkąta ACH.

Teraz rozwiążemy zadanie ogólniejsze od zadania 28.

Zadanie 28a. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o następujących długościach krawędzi:

$$AB = CD = a, \quad AD = BC = b \quad \text{oraz} \quad AE = DH = c.$$

Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.



Rozwiązanie. Zaczniemy od obliczenia długości boków trójkąta ACH. Korzystając trzykrotnie z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$AC = \sqrt{a^2+b^2}, \quad AH = \sqrt{b^2+c^2} \quad \text{oraz} \quad CH = \sqrt{a^2+c^2}.$$

Następnie obliczamy długość odcinka DP. Przypomnijmy sobie, że ten odcinek jest wysokością trójkąta prostokątnego ACD. Długość tego odcinka możemy łatwo obliczyć, obliczając dwoma sposobami pole trójkąta ACD. Mamy więc

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot DP = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD,$$

skąd

$$DP = \frac{AD \cdot CD}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta HDP dostajemy teraz

$$HP^2 = DP^2 + DH^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + c^2 = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2},$$

czyli

$$HP = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Teraz możemy obliczyć długość odcinka DW. W tym celu obliczamy dwoma sposobami pole trójkąta prostokątnego HDP. Mamy zatem

$$\frac{1}{2} \cdot HP \cdot DW = \frac{1}{2} \cdot DP \cdot DH,$$

czyli

$$\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot DW=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot c.$$

Stąd otrzymujemy

$$DW=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

Wreszcie możemy obliczyć długość odcinka HW. Mianowicie znów korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, tym razem dla trójkąta HWD. Mamy więc

$$\begin{aligned} HW^2 &= DH^2-DW^2=c^2-\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=\frac{c^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^2b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=\\ &=\frac{a^2b^2c^2+a^2c^4+b^2c^4-a^2b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=\frac{a^2c^4+b^2c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=\frac{c^4(a^2+b^2)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}, \end{aligned}$$

czyli

$$HW=\frac{c^2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

Otrzymany wzór możemy zapisać w innej postaci. W tym celu najpierw obliczymy pole trójkąta ACH, obliczając dwoma sposobami objętość ostrosłupa $ACDH$.

$$\frac{1}{3}\cdot P_{ACH}\cdot DW=\frac{1}{3}\cdot P_{ACD}\cdot DH=\frac{1}{6}\cdot AD\cdot CD\cdot DH=\frac{1}{6}\cdot abc.$$

Stąd otrzymujemy

$$P_{ACH}\cdot\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}=\frac{1}{2}\cdot abc,$$

czyli

$$P_{ACH}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}.$$

Inaczej mówiąc,

$$\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=2\cdot P_{ACH}.$$

Mamy zatem

$$HW=\frac{c^2\cdot AC}{2\cdot P_{ACH}}.$$

Teraz zauważmy, że

$$2c^2=(a^2+c^2)+(b^2+c^2)-(a^2+b^2)=CH^2+AH^2-AC^2,$$

skąd ostatecznie dostajemy

$$HW=\frac{AC\cdot(CH^2+AH^2-AC^2)}{4\cdot P_{ACH}}.$$

Długość odcinka HW została wyrażona za pomocą długości boków trójkąta ACH i pola tego trójkąta. Zamieniając w otrzymanym wzorze kolejność wierzchołków, otrzymujemy analogiczne wzory na długości odcinków AW i CW:

$$AW = \frac{CH \cdot (AC^2 + AH^2 - CH^2)}{4 \cdot P_{ACH}},$$
$$CW = \frac{AH \cdot (AC^2 + CH^2 - AH^2)}{4 \cdot P_{ACH}}.$$

Długości odcinków AW, CW i HW możemy także wyrazić za pomocą długości krawędzi a, b i c prostopadłościanu:

$$AW = \frac{b^2\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}},$$
$$CW = \frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}},$$
$$HW = \frac{c^2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Rozwiązanie zadania 28 otrzymujemy podstawiając $a = b = 1$ oraz $c = \frac{1}{2}$. Mamy wówczas

$$a^2 + b^2 = 2 \quad \text{oraz} \quad a^2 + c^2 = b^2 + c^2 = \frac{5}{4}.$$

Ponadto

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Stąd dostajemy

$$AW = CW = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{6},$$
$$HW = \frac{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Interesujące jest to, że istnieje wiele trójek liczb całkowitych (a, b, c) takich, że liczba $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ jest kwadratem. W dodatku na końcu tego tekstu znajduje się lista wszystkich takich trójek (a, b, c), spełniających dwa warunki:

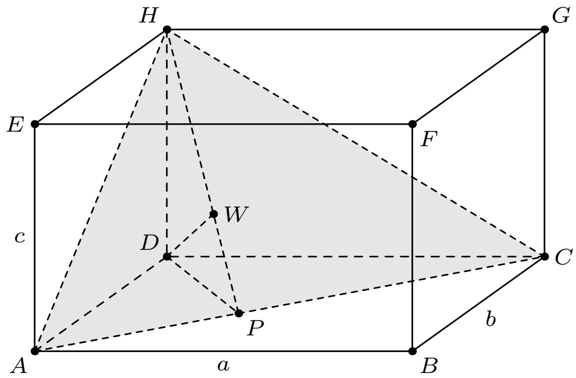
- $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$,
- liczby a, b i c nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.

Weźmy z tej listy jedną taką trójkę i zobaczmy, jak wygląda rozwiązanie odpowiedniego zadania.

Zadanie 28b. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o następujących długościach krawędzi:

$$a = AB = CD = 4, \quad b = AD = BC = 3 \quad \text{oraz} \quad c = AE = DH = 1.$$

Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACHD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACH. Oblicz długości odcinków AW, CW i HW.



Rozwiązanie. Najpierw obliczamy

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 16 \cdot 9 + 16 + 9 = 169 = 13^2.$$

Zatem

$$CW = \frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} = \frac{16\sqrt{10}}{13},$$

$$AW = \frac{b^2\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} = \frac{9\sqrt{17}}{13},$$

$$HW = \frac{c^2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} = \frac{5}{13}.$$

Dodatek.

Lista wszystkich trójek liczb całkowitych (a, b, c), spełniających trzy warunki:

- liczba $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ jest kwadratem liczby całkowitej,
- $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$,
- liczby a, b i c nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.

a	b	c	$\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$
1	1	2	3
1	2	3	7
1	2	8	18
1	3	4	13
1	4	5	21
1	5	6	31
1	6	7	43
1	7	8	57
1	8	9	73
1	9	10	91
2	3	5	19
2	3	9	33
2	5	7	39
2	7	9	67
3	4	7	37
3	5	8	49
3	7	10	79
4	5	9	61
4	7	7	63
6	7	7	77
6	7	9	93
6	8	9	102