Henryk Dąbrowski
Waldemar Rożek

Arkusz przykładowy, poziom rozszerzony (A1)

Zadanie 5.

Dla każdego α suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha$ jest równa

A. $\sin 4\alpha$
B. $2\sin 4\alpha$
C. $2\sin 2\alpha\cos\alpha$
D. $2\sin\alpha\cos 2\alpha$

========================

Pierwszym, narzucającym się sposobem rozwiązania jest zastosowanie wzoru na sumę sinusów. Wzór ten znajduje się w zestawie wybranych wzorów, który każdy maturzysta powinien mieć do dyspozycji podczas egzaminu maturalnego. Przypomnijmy ten wzór

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Możemy oczywiście zastosować go bezpośrednio, i wówczas mamy

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2} = 2\sin\frac{4\alpha}{2}\cos\frac{-2\alpha}{2} = 2\sin 2\alpha\cos(-\alpha).$$

Wykres funkcji cosinus, który także znajduje się w zestawie wybranych wzorów, jest symetryczny względem osi *Oy* układu współrzędnych, a to oznacza, że dla przeciwnych argumentów funkcja przyjmuje tę samą wartość, a więc $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. W rezultacie otrzymujemy

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos(-\alpha) = 2\sin 2\alpha\cos\alpha.$$

Zatem prawidłową odpowiedzią jest C.

Lepiej jednak zamienić kolejność składników sumy $\sin\alpha + \sin 3\alpha$, zapisując $\sin 3\alpha + \sin\alpha$ i wtedy dopiero zastosować wzór na sumę sinusów, otrzymując

$$\sin 3\alpha + \sin\alpha = 2\sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2} = 2\sin\frac{4\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha}{2} = 2\sin 2\alpha\cos\alpha.$$

Jak widać, ten prosty zabieg zamiany kolejności składników pozwolił nam skrócić rozwiązanie i jednocześnie uniknąć konieczności zastanawiania się, czy $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

W drugim sposobie rozwiązania wykorzystamy najpierw wzór na sinus sumy kątów (ten wzór także znajduje się w zestawie wybranych wzorów), zapisując

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha.$$

Teraz możemy zastosować wzory na sinus i na cosinus podwojonego kąta. Otrzymujemy

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \cos\alpha\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha =$$

$$= \sin\alpha\left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right).$$

Zatem suma

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha = \sin\alpha + \sin\alpha\left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \sin\alpha\left(1 + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) =$$

$$= \sin\alpha\left(3\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \sin\alpha\cdot 4\cos^2\alpha = 2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha\,.$$

Stąd, ponownie wykorzystując wzór na sinus podwojonego kąta, mamy

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\,.$$

Oczywiście znajomość wzoru na sinus potrojonego kąta (tego wzoru maturzysta nie znajdzie jednak w zestawie wybranych wzorów) pozwala nam skrócić rozwiązanie o całą pierwszą część.

W obu przedstawionych rozwiązaniach postępowaliśmy tak, jakbyśmy w ogóle nie znali odpowiedzi. Tak samo rozwiązywalibyśmy to zadanie, gdyby polecenie brzmiało np. zapisz sumę $\sin\alpha + \sin 3\alpha$ w postaci iloczynu funkcji trygonometrycznych. To zadanie jest jednak zadaniem zamkniętym i wiemy, że dokładnie jedna z podanych odpowiedzi jest poprawna. Dlatego też możemy próbować wyeliminować niepoprawne odpowiedzi. Jeśli uda nam się szybko podstawić taką wartość α, dla której któraś z równości nie jest prawdziwa, to szybko eliminujemy tę błędną odpowiedź. Jak zatem trafiać w taką wartość? Oczywiście najpierw należy wziąć te wartości α, dla których znamy wartości funkcji trygonometrycznych. Zwykle najłatwiej wziąć $\alpha = 0$. Wówczas suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha$ przyjmuje wartość $\sin 0 + \sin(3\cdot 0) = 0$. W każdym z podanych w odpowiedziach wyrażeń jednym z czynników jest sinus α lub sinus całkowitej wielokrotności α, więc każde z tych wyrażeń dla $\alpha = 0$ ma wartość 0. Zatem wzięcie $\alpha = 0$ nic nam nie dało.

Podstawienie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ również niewiele nam daje, ponieważ suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha$ jest wtedy równa $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1 + (-1) = 0$, natomiast $\sin 4\alpha = \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0$ oraz $2\sin 4\alpha = 2\cdot 0 = 0$. W tym momencie nie ma sensu obliczać wartości pozostałych dwóch wyrażeń, bo i tak nie jesteśmy w stanie wskazać poprawnej odpowiedzi.

Weźmy więc $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Wtedy suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha$ jest równa $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Obliczamy wartości wyrażeń podanych w odpowiedziach:

A. $\sin 4\alpha = \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mogliśmy też od razu zauważyć, że wartość tego wyrażenia dla każdego α jest co najwyżej równa 1, więc nie może być równa $\frac{3}{2}$.

B. $2\sin 4\alpha = 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} \neq \frac{3}{2}$, więc tę odpowiedź też odrzucamy.

C. $2\sin 2\alpha \cos\alpha = 2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$.

D. $2\sin\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$.

Zatem poprawną odpowiedzią jest C.

Jeszcze łatwiej byłoby sprawdzić, która z równości zachodzi dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, natomiast

A. $\sin 4\alpha = \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sin\pi = 0$,

B. $2\sin 4\alpha = 2\cdot 0 = 0$,

C. $2\sin 2\alpha\cos\alpha = 2\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

D. $2\sin\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = 0$.

Zatem poprawną odpowiedzią jest C.

Również sprawdzenie dla $\alpha = \frac{\pi}{3}$ prowadzi szybko do eliminacji błędnych odpowiedzi.

Suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartości kolejnych wyrażeń są wówczas równe

A. $\sin 4\alpha = \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{3}\right) < 0$,

B. $2\sin 4\alpha = 2\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{3}\right) < 0$,

D. $2\sin\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) < 0$.

Zatem tylko C może być poprawną odpowiedzią.