Próbna matura rozszerzona (jesień 2014 r.)

Zadanie 13 — kilka uogólnień

Wojciech Guzicki

Zadanie 13. Wykaż, że jeżeli $a > b \geq 1$, to $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$.

Pokażę dwa uogólnienia tego zadania.

Zadanie 13a. Wykaż, że jeżeli $n \geq 1$ oraz $a > b \geq 1$, to $\frac{a}{n+a^{n+1}} < \frac{b}{n+b^{n+1}}$.

Rozwiązanie. Przekształcamy dowodzoną nierówność w sposób równoważny (korzystając z tego, że $a - b > 0$):

$$\begin{gathered}
a(n+b^{n+1}) < b(n+a^{n+1}),\\
an + ab^{n+1} < bn + a^{n+1}b,\\
an - bn < a^{n+1}b - ab^{n+1},\\
(a-b)\cdot n < ab\cdot(a^n - b^n),\\
(a-b)\cdot n < ab\cdot(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\\
n < ab\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).
\end{gathered}$$

Teraz zauważamy, że $ab > 1$ oraz wyrażenie $a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$ jest sumą n składników, z których każdy jest co najmniej równy 1 (a pierwszy jest większy od 1). Zatem

$$ab > 1 \quad \text{oraz} \quad a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1} > n,$$

skąd wynika teza.

Zadanie 13b. Wykaż, że jeżeli $n \geq 1$ oraz $a > b \geq \sqrt[n+1]{\frac{1}{n}}$, to $\frac{a}{1+a^{n+1}} < \frac{b}{1+b^{n+1}}$.

Rozwiązanie. Przekształcamy dowodzoną nierówność w sposób równoważny (korzystając z tego, że $a - b > 0$):

$$\begin{gathered}
a(1+b^{n+1}) < b(1+a^{n+1}),\\
a + ab^{n+1} < b + a^{n+1}b,\\
a - b < a^{n+1}b - ab^{n+1},\\
a - b < ab\cdot(a^n - b^n),\\
a - b < ab\cdot(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\\
1 < ab\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).
\end{gathered}$$

Niech teraz

$$x = \sqrt[n+1]{\frac{1}{n}}.$$

Wówczas $ab > x^2$ oraz wyrażenie $a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$ jest sumą n składników, z których każdy jest co najmniej równy x^{n-1} (a pierwszy jest większy od x^{n-1}). Zatem

$$ab > x^2 \quad \text{oraz} \quad a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1} > nx^{n-1},$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
IBE entuzjaści edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

skąd wynika, że:

$$ab(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) > x^2 \cdot nx^{n-1} = nx^{n+1} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

To kończy dowód.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
IBE entuzjaści edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY