P. Ludwikowski

Matura próbna, poziom podstawowy – grudzień 2014.
Kilka zdań o wybranych zadaniach zamkniętych

Zadania zamknięte na egzaminie maturalnym z matematyki na dobre „zadomowiły” się w arkuszach egzaminacyjnych na poziomie podstawowym. Nic w tym dziwnego, bo mają wiele zalet. Z jednej strony są to zalety organizacyjne – łatwość techniczna oceniania, stuprocentowa porównywalność, czytelność komunikowania wyników. Także ich walory pomiarowe są nie do przecenienia. W poniższym tekście chciałbym się jednak skupić na walorach dydaktycznych tych zadań. Wbrew powszechnej opinii zadania zamknięte mogą dostarczyć wielu interesujących bodźców, inspirujących uczniów do samodzielnej pracy.

Zadanie 6. (0–1)

Wyrażenie $(3x+1+y)^2$ jest równe

A. $3x^2+y^2+1$ **B.** $9x^2+6x+y^2+1$

C. $3x^2+y^2+6xy+6x+1$ **D.** $9x^2+y^2+6xy+6x+2y+1$

Najczęściej, szczególnie Ci uczniowie, którzy nie wybierają poziomu rozszerzonego, rozwiązują to zadanie elementarnie:

$$(3x+1+y)^2=(3x+1+y)(3x+1+y)=9x^2+3x+3xy+3x+1+y+3xy+y+y^2=$$
$$=9x^2+y^2+6xy+6x+2y+1$$

i wskazują odpowiedź D.

Spora grupa uczniów, głównie tych, którzy decydują się zdawać matematykę na poziomie rozszerzonym, korzysta ze wzoru skróconego mnożenia:

$$(3x+1+y)^2=((3x+1)+y)^2=(3x+1)^2+2(3x+1)y+y^2=9x^2+6x+1+6xy+2y+y^2.$$

To rozwiązanie warto omówić na lekcji, bo zawiera charakterystyczny dla rozwiązań wielu zadań motyw: *„Nowy” problem, którego rozwiązania nie znamy, próbujemy sprowadzić do takiej postaci, aby można było wykorzystać „stare”, znane algorytmy*.

Znajdą się oczywiście uczniowie, którzy zastosują gotowy wzór na kwadrat sumy trzech składników: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, otrzymując od razu odpowiedź.

Interesujące może być także rozwiązanie graficzne.

	$3x$	1	y
$3x$	$9x^2$	$3x$	$3xy$
1	$3x$	1	y
y	$3xy$	y	y^2

Pole kwadratu o boku $3x+1+y$, można przedstawić jako sumę pól odpowiednich kwadratów i prostokątów. Ten sposób rozwiązania łatwo prowadzi do poszukiwania ciekawych uogólnień zadania.

Wszystkie powyżej przedstawione sposoby rozwiązania tego zadania traktują je jak zadanie otwarte. Okazuje się jednak, że szukając rozwiązania można skorzystać z jego struktury oraz z następującego twierdzenia: *Jeżeli wyrażenia algebraiczne są równe, to dla tych samych wartości zmiennych mają tę samą wartość*. Weźmy np. $x=0,\ y=1$, wtedy wyrażenie $(3x+1+y)^2$ ma wartość równą 4. Następnie, po kolei obliczamy wartości wyrażeń zapisanych w punktach A., B. oraz C. dla tych samych wartości zmiennych. Ponieważ otrzymujemy odpowiednio 2, 2, oraz 2, poprawna musi być odpowiedź D. Wynika to z warunku, że dokładnie jedna odpowiedź ma być prawdziwa. Oczywiście, po sprawdzeniu stwierdzamy, że wartość wyrażenia zapisanego w punkcie D. jest równa 4. Warto omawiając ten sposób wskazania poprawnej odpowiedzi zwrócić uwagę na jego ograniczenia np. wiele wyrażeń może dla tych samych wartości zmiennych przyjmować tę samą wartość, pomimo, że nie są równe. Ciekawe może okazać się poszukiwanie przykładów takich wyrażeń.

Zadanie 9. (0–1)

Na płaszczyźnie dane są punkty: $A=\left(\sqrt{2},\ \sqrt{6}\right)$, $B=(0,\ 0)$ i $C=\left(\sqrt{2},\ 0\right)$. Kąt BAC jest równy

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

To zadanie może ilustrować sytuację, jak nadmiar wiedzy stosowanej automatycznie, może skomplikować zamiast uprościć rozwiązanie. Część uczniów zna (pomimo, że to zagadnienie wykracza poza podstawę programową nawet dla poziomu rozszerzonego) wzór na cosinus kąta między wektorami:

$$\cos(\sphericalangle BAC)=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Obliczają więc:

$$\overrightarrow{AB}=\left[-\sqrt{2},-\sqrt{6}\right],\qquad \overrightarrow{AC}=\left[0,-\sqrt{6}\right],$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{8},\qquad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6},$$

$$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}=-\sqrt{2}\cdot 0+\left(-\sqrt{6}\right)\cdot\left(-\sqrt{6}\right)=6$$

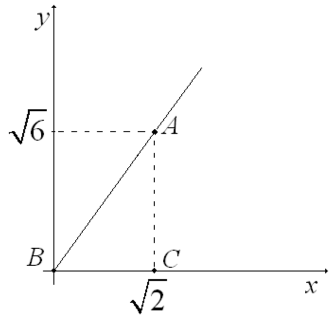
i ostatecznie

$$\cos(\sphericalangle BAC)=\frac{6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd wynika, że $|\sphericalangle BAC|=30^\circ$, ponieważ $|\sphericalangle BAC|<180^\circ$.

Uczeń, który wybrał takie rozwiązanie, pomimo, że stosuje znany algorytm, musi się sporo napracować. Łatwo popełnić w pośpiechu pomyłkę. Zyskiem jest jednak fakt, że nie musi wykonywać żadnego rysunku, interpretować danych itd.

Jeżeli jednak uczeń wykona rysunek poglądowy, rozwiązanie zadania jawi się w sposób całkiem naturalny.



Obliczamy $\operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem $|\angle BAC| = 30°$.

Niektórzy uczniowie zauważą, że trójkąt ABC jest „połówką” trójkąta równobocznego. Można to uzasadnić np. obliczając długość boku $|AB| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2 \cdot |BC|$ i powołując się na prostopadłość odcinków AC i BC. Wtedy odpowiedź jest natychmiastowa.

Kolejny sposób rozwiązania tego zadania to skorzystanie z własności współczynników w równaniu prostej. Piszemy równanie prostej AB:

$y = ax$ (ponieważ prosta przecina początek układu współrzędnych),

$\sqrt{6} = a \cdot \sqrt{2}$ (ponieważ prosta przechodzi przez punkt A),

stąd

$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle ABC) = \sqrt{3}$. Zatem $|\angle ABC| = 60°$.

Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, to $|\angle BAC| = 90° - 60° = 30°$.

Okazuje się, że to jeszcze nie koniec pomysłów na rozwiązanie tego zadania.
Zapiszmy pole trójkąta ABC dwoma sposobami:

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle BAC)$.

Po podstawieniu długości odpowiednich odcinków mamy:

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin(\angle BAC)$,

stąd $\sin(\angle BAC) = \frac{1}{2}$. Zatem $|\angle BAC| = 30°$.

Stare dydaktyczne wskazanie zachęca nauczyciela do rozwiązywania jednego zadnia wieloma sposobami. Zadania zamknięte świetnie się do tego celu nadają.