9. Matematyka pod lupą

9.1. Matematyka jest ważna

Obowiązkowa matura z matematyki ma tylu przeciwników, co gorących entuzjastów. Jak każdy egzamin maturalny jest sprawdzianem wiedzy i umiejętności osiągniętych w toku edukacji formalnej od szkoły podstawowej począwszy. Nie jest więc nadużyciem spostrzeżenie, że i na wynik egzaminu maturalnego, i na samo podejście do matematyki wpływ mają skumulowane efekty dobrego lub złego nauczania matematyki na wcześniejszym etapie. Jeśli bowiem uczeń zniechęci się do matematyki w szkole podstawowej, nie nauczy się na tym etapie analizy problemu, nie rozwinie umiejętności twórczego podejścia do zadań, to będzie uważał ten przedmiot za trudny, a jego wyniki szkolne będą go prawdopodobnie w tym podejściu utwierdzały. Tylko, jeśli w toku edukacji trafi na nauczyciela przekonanego o celowości rozwijania zdolności matematycznych nawet u uczniów nieradzących sobie z tym przedmiotem, ma szansę zmienić zdanie. Jeśli nauczyciel będzie uważał, że zdolności matematyczne się ma lub nie, a w trakcie nauczania będzie się skupiał na wykształceniu umiejętności rozwiązywania zadań według wzroca, to takiemu uczniowi, być może, matura z matemayki będzie się śnić do końca życia jako koszmar.
Dlatego tak istotne jest, byśmy zrozumieli, co leży u podłoża niepowodzeń matematycznych uczniów i nauczycieli, i myśleli o tym, jak w jednych i drugich rozbudzić pasję do tego przedmiotu. Bo matematyka to wspaniała gimnastyka umysłu, która przydaje się w życiu.
Przedstawione w niniejszym rozdziale wyniki badań są rozszerzeniem zagadnień ujętych w rozdziale 5, dotyczącym jakości edukacji.

9.2. Matura z matematyki w ujęciu historycznym

9.2.1. Wprowadzenie

Matura, przynajmniej z założenia, odgrywa podwójną rolę. Z jednej strony potwierdza, że absolwent szkoły ponadgimnazjalnej (liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum) zdobył pewne kompetencje określone w podstawie programowej dla przedmiotów, które zdawał na egzaminie, a z drugiej otwiera dostęp do kształcenia wyższego. To, czy z danej dziedziny egzamin maturalny jest obowiązkowy czy fakultatywny, ma istotne znaczenie dla potwierdzenia kompetencji. Prekursorzy wprowadzenia egzaminów maturalnych nie mieli wątpliwości, że matematyka oprócz języków jest tym przedmiotem, z którego musi być obowiązkowy egzamin dla wszystkich, którzy chcieli uzyskać świadectwo dojrzałości. Warto tutaj podkreślić, że w ciągu minionego wieku w krajach rozwiniętych procent populacji uczęszczającej do szkoły kończącej się maturą wzrósł bardzo istotnie. Problem, w jaki sposób następował wzrost liczby zdających maturę w naszym kraju, której nieodzowną częścią była matematyka, ciągle jeszcze czeka na opracowanie. Zapewne w kwestii wzrostu liczby maturzystów nie odbiegamy znacznie od innych krajów. Np. we Francji od 1900 roku do końca XX wieku liczba zdających maturę wzrosła osiemdziesięciokrotnie[1]. Jak pisze Legrand:

Najbardziej zdumiewający przykład za granicą daje być może Japonia, gdzie liczba uczniów kontynuujących naukę w szkołach ponadobowiązkowych w ciągu jednego wieku wzrosła z 3 procent do 95 procent. (…) Ponieważ wszystkie licea japońskie dają dyplom na zakończenie nauki, można twierdzić, że aktualnie około 90 procent Japończyków w wieku 20 lat życia ma maturę.[2]

W Polsce obecnie do szkół ponadgimnazjalnych, których absolwenci mogą zdawać maturę, uczęszcza 80 procent populacji uczniów opuszczających mury gimnazjum. Ale, o ile absolwenci liceów ogólnokształcących i profilowanych prawie wszyscy bezpośrednio po ukończeniu szkoły przystępują do egzaminu dojrzałości, to absolwenci technikum niekoniecznie.

9.2.2. Egzaminy końcowe w polskich szkołach na początku XX wieku

Pierwsze informacje na temat egzaminu maturalnego, w tym egzaminu z matematyki, pochodzą z ostatniego dwudziestolecia XVIII wieku. 23 grudnia 1788 roku, za panowania Fryderyka Wilhelma II, na podstawie edyktu

1 Legrand P. (1995), *Matura we Francji i na świecie*, Hachette Livere.
2 Ibidem.

królewskiego przygotowanego pod kierunkiem ówczesnego ministra oświaty, Freiherra v. Zedlitza w szkołach pruskich wprowadzono egzamin dojrzałości. Uzasadnieniem wprowadzenia takiego egzaminu były narzekania ówczesnych uniwersyteckich profesorów na niski poziom przygotowania do studiowania absolwentów gimnazjów. Jak pisze Franciszek Majchrowicz w czasopiśmie „Muzeum" w 1896 roku[3], wprowadzenie tego egzaminu wywołało burzliwą dyskusję.

Problem jakości przygotowania kandydatów do studiowania jest aktualny również w dzisiejszych czasach. Na obniżanie się umiejętności matematycznych studentów wstępujących w mury uczelni zwracają od kilku lat uwagę środowiska akademickie z zakresu nauk ścisłych i technicznych. Wprowadzenie obowiązku zdawania matematyki na egzaminie maturalnym w 2010 roku, podobnie jak pierwszego egzaminiu dojrzałości 222 lata wcześniej, wywołało ożywioną dyskusję zwolenników i zagorzałych przeciwników tej decyzji.

Do szkół na ziemiach polskich egzamin dojrzałości został wprowadzony najprawdopodobniej w 1812 roku. W ustawie zatytułowanej „Wewnętrzne urządzenie szkół departamentowych 1812 roku"[4] w paragrafie 41 znajdujemy:

Nikt do Uniwersitetu przyiętym nie będzie, kto całego kursu nauk w szkole Departamentowey nie ukończy, niżey opisanego examinu przed naiwyższą Magistraturą edukacyyną mieyscową nie odprawi, i nie otrzyma patentu, czyli zaświadczenia maturitatis od teyże Magistratury, od Rektora i Profesorów examinuiących podpisanego.

Natomiast paragraf 50 tej ustawy głosił:

Po skończonym takowym examinie i oddaleniu się tak examinowanych, iak publiczności, Magistratura edukacyyna wraz z Rektorem i przybranemi professorami sądzą o doyrzałości każdego odchodzącego, i wydaią względem niego wyrok sine vel cum admonitione. Na koniec uznanym za doyrzałych daią dyplomata podpisami wszystkich examinuiących osób, i pieczęciami tak Magistratury edukacyyney, iak szkolną stwierdzone.

Znacznie później, bo w 1849 roku w Austrii, wstęp na uniwersytet został uzależniony od egzaminów składanych przez abiturientów na zakończenie gimnazjum. Wprowadzenie egzaminu dojrzałości w Austrii zbiega się z reformą programową w edukacji zwaną „Zarysem Organizacyjnym". We Francji egzaminy dojrzałości wprowadził minister Fourtoul w 1852 roku. W kolejnych latach pojawiła się matura w innych europejskich krajach z wyjątkiem Anglii, Szkocji i Holandii. W Anglii uniwersytet londyński (London University) jako pierwszy wprowadził egzamin (*for matriculation*) w 1858 roku. Kilkanaście lat później zrobiły to uniwersytety w Oxfordzie i Cambridge (1874 r.).

Egzamin dojrzałości, podobnie jak dzisiaj, był przepustką do podjęcia studiów. W „Encyklopedii wychowawczej" z 1885 roku czytamy, że (...) *Egzamina dojrzałości mają na celu przekonanie się, o ile uczeń kończący klasę VIII-ą uzdolniony jest do słuchania nauk w uniwersytecie lub innych specjalnych, wyższych naukowych zakładach. Do egzaminów dojrzałości, obok uczniów gimnazyjum, mogą przystępować i kandydaci kończący nauki w zakładach prywatnych, lub przygotowani z edukacyi domowej*[5].

Na początku XX wieku, zgodnie z przepisami szkolnymi, każde gimnazjum publiczne przeprowadzało egzamin dojrzałości, zaś gimnazja prywatne zgłaszały swych uczniów do gimnazjów, które miały prawa te egzaminy przeprowadzać. Podobnie jak ok. 80 lat wcześniej egzamin pisemny obejmował język ojczysty (lub wykładowy), język łaciński i grecki, matematykę i drugi język nowożytny. Na egzaminie ustnym zdawano: literaturę języka ojczystego (wykładowego), język łaciński i grecki, historię, geografię, matematykę, fizykę oraz gramatykę i literaturę drugiego języka nowożytnego[6]. Przewodniczący komisji egzaminacyjnej w porozumieniu z nauczycielem danego przedmiotu mógł ucznia zwolnić wyjątkowo ze zdawania jednego z przedmiotów przewidzianych na egzaminie ustnym. W trakcie egzaminu zadawane pytania wpisywano do protokołu, a egzaminator wpisywał ocenę bezpośrednio po zakończonym egzaminie.

Pierwsze egzaminy dojrzałości w części pisemnej obejmowały obowiązkowo matematykę oraz język ojczysty, łaciński, grecki i obcy język nowożytny.

---

[3] Majchrowicz F., (1896), *W sprawie egzaminów dojrzałości w naszych szkołach średnich*, [w:] *Muzeum. Czasopismo poświęcone sprawom wychowania i szkolnictwa,* Rocznik XXIII, Towarzystwo Nauczycieli Szkół Wyższych.

[4] Lipiński J., (1812), *Wewnętrzne urządzenie szkół departamentowych*, Warszawa.

[5] Lubomirski J.T. (red.), (1885), *Encyklopedia wychowawcza*, tom II. Warszawa.

[6] Kopia H., (1900), *Ustawy i rozporządzenia obowiązujące w galicyjskich szkołach średnich*, Lwów, s. 83.

Na egzaminie dojrzałości na początku XX wieku oddzielano geometrię wykreślną od matematyki. Nie było zadań z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, gdyż dziedziny te rozwinęły się później[7]. Zadania wymagały nie tylko znajomości pojęć, twierdzeń, czy algorytmów, ale także umiejętności łączenia różnych elementów wiedzy lub stosowania matematyki w sytuacjach osadzonych w kontekście realnym, w tym modelowania sytuacji pozamatematycznych. Treści matematyczne z zakresu algebry, analizy matematycznej, geometrii analitycznej, czy geometrii wykreślnej wymagane na egzaminie maturalnym 100 lat temu wykraczały znacznie poza te, które zapisane są w podstawach programowych z 23 sierpnia 2007 roku oraz 23 grudnia 2008 roku, nawet na poziomie rozszerzonym. Nacisk położony był na wiadomości, znajomość pewnych procedur obliczeniowych, a w mniejszym stopniu na umiejętność rozumowania. Należy jednak zauważyć, że 100 lat temu w zestawach zadań egzaminacyjnych pojawiały się zadania, których rozwiązanie wymagało od maturzysty niektórych umiejętności zapisanych jako wymagania ogólne w podstawie programowej z 23 grudnia 2008 roku, np. umiejętności budowania modelu matematycznego, czy doboru strategii rozwiązania problemu. Niektóre umiejętności sprawdzane na ówczesnym egzaminie nie mają już dzisiaj tak dużego znaczenia. Na przykład w zadaniu 2 z matematycznego zestawu II, przedstawionego poniżej, sprawdzano umiejętność posługiwania się dokładnymi tablicami trygonometrycznymi (obliczano wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów podanych z dokładnością do jednej sekundy kątowej). W czasach komputerów nie wymaga się już od maturzysty takiej umiejętności.

Matematyka

Zestaw I

1. Rozwiązać równanie

$$5^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4$$
$$3 \cdot 5^{\sin x} - 2 \cdot 3^{\sin y} = 5$$

2. Tor kolejowy zakreśla łuk paraboli wyrażonej równaniem: $y^2=150x$. Niedaleko toru biegnie droga, której równanie $y = 5x + 40$. Wyznaczyć punkt toru kolejowego, położony najbliżej drogi, i jego odległość od niej. Jednostką długości jest kilometr.

3. Osoba, umarzająca dług ratami w wysokości 547 koron płatnemi z końcem każdego roku przez lat 8, pragnie dług ten spłacić w dwóch równych ratach. Ratę pierwszą płaci zaraz, drugą zaś z początkiem roku piątego. Obliczyć wysokość raty, jeżeli liczono 6 proc.

Zestaw II

1. Rozwiązać równanie:

$$4\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} = 11\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} - 6$$

$$y = 2 - \log x$$

2. Obliczyć odległość sferyczną Krakowa od Petersburga, jeżeli geograficzne długości i szerokości tych miast są następujące:

Kraków:

szerokość: $50^\circ 3' 50''$
długość: $37^\circ 36' 13''$

Petersburg:

szerokość: $59^\circ 56' 30''$
długość: $47^\circ 58' 12''$

3. Do elipsy wyznaczonej połówkami swych osi: $a = 4$, $b = 3$, poprowadzić styczne z punktu (-2, 5). Wyznaczyć równania stycznych, współrzędne punktów styczności oraz równanie cięciwy styczności.

---

[7] Rachunek prawdopodobieństwa wywodzi się z hazardu i analizy gier losowych i sięga korzeniami do XVII wieku. Jednakże za początek współczesnej teorii prawdopodobieństwa uznaje się 1933 rok, w którym Kołmogorow opublikował aksjomatykę rachunku prawdopodobieństwa.

Geometria wykreślna

Zestaw I

I. Dane są kula i dowolna płaszczyzna. Wyznaczyć ślady płaszczyzn stycznych do kuli równoległych do danej płaszczyzny.

2. Wyznaczyć cień własny i rzucony na płaszczyzny rzutowe danej kuli.

3. Przez punkt dany poprowadzić prostą, która przecina dwie dane proste wichrowate.

Zestaw II

1. Dane są dowolna płaszczyzna i prosta na zewnątrz niej. Wyznaczyć ślady płaszczyzn, przesuniętych przez tę prostą, a nachylonych do danej płaszczyzny pod kątem danym.

2. Wykreślić cień własny i rzucony stożka prostego kołowego, dotykającego się swą powierzchnią płaszczyzny poziomej rzutów, gdy dane są jego wysokość i promień podstawy.

3. Dane są kula i prosta, nie przechodząca przez jej środek, a nachylona do obu płaszczyzn rzutowych. Wyszukać rzuty punktów, w których owa prosta przebija daną kulę.

Przez dwa wieki egzamin maturalny ulegał wielu zmianom zarówno w treści, jaki i w sposobie egzaminowania[8].

9.2.3. Egzamin dojrzałości z matematyki ćwierć wieku temu (likwidacja obowiązkowej matury z matematyki)

Do 1983[9] roku egzamin maturalny z matematyki był obowiązkowy dla wszystkich abiturientów szkół ponadpodstawowych kończących się egzaminem dojrzałości. Tematy maturalne ustalane były przez kuratoria oświaty i wychowania. Każdego roku nauczyciele uczący w szkołach ponadpodstawowych proszeni byli o przesyłanie do kuratorium propozycji zadań egzaminacyjnych.

Później egzamin maturalny z matematyki był obowiązkowy tylko dla uczniów uczących się w klasach o profilu matematyczno-fizycznym, a dla tych, którzy uczyli się w klasach o profilu ogólnym, był przedmiotem wyboru. Matematyka była również jednym z przedmiotów do wyboru na egzaminie ustnym. Tematy egzaminów maturalnych zróżnicowane były ze względu na typ szkoły i profil. Różniły się także terytorialnie, gdyż każde z kuratoriów układało własne tematy, które w dniu egzaminu odbierali dyrektorzy szkół najczęściej w siedzibie kuratorium. Maturalne zestawy zadań z matematyki w poszczególnych województwach cechowała ogromna różnorodność pod względem sprawdzanych umiejętności, jak i poziomu trudności. Sposób oceniania rozwiązań zadań maturalnych ustalał każdy nauczyciel uczący daną klasę i oceniający zadania swoich uczniów. Na egzaminie uczeń otrzymywał pięć zadań, z których miał wybrać i rozwiązać trzy. W przypadku, gdy rozwiązał więcej, ocenie podlegały jedynie wskazane trzy zadania, lub w przypadku braku wskazań – trzy pierwsze w arkuszu egzaminacyjnym. Fakt, że w każdym województwie były inne zadania oraz że to uczeń wybierał z zestawu egzaminacyjnego trzy zadania, które podlegały ocenie, powodował, że nie było kontroli nad tym, jakie umiejętności były badane za pomocą egzaminu maturalnego. Ponadto brak ustalonych kryteriów oceniania powodował, że wyniki egzaminu maturalnego nie były porównywalne nie tylko w skali kraju, ale nawet w obrębie jednego województwa, a nawet jednej szkoły.

Przy ocenie prac maturalnych niezwykle duży nacisk kładziono na sposób przedstawiania rozwiązania zadania. Zapis rozwiązania uważany w pracy maturalnej za właściwy był bardzo sformalizowany i zasadniczo różny od tego, z czym uczeń spotykał się w czasie lekcji. Poza zapisem kolejnych etapów rozwiązania wymagane było uzasadnienie każdego z nich – tzw. komentarz. Dlatego nauczyciele poświęcali w klasie maturalnej sporo czasu nauce zapisywania rozwiązań zadań maturalnych. Przy wielu zadaniach opatrzenie rozwiązania właściwym komentarzem stanowiło dla ucznia większy problem niż samo rozwiązanie zadania. Poniżej przedstawiony jest przykład zadań maturalnych z 1984 roku[10].

8 Majchrowicz F., (1896), *W sprawie egzaminów dojrzałości w naszych szkołach*, ibid., s. 14–15.
9 Zarządzenie MOiW z 22 kwietnia 1982 roku, Dz U Nr 5 poz. 4 znosi obowiązkową maturę w liceach ogólnokształcących o profilu ogólnym, humanistycznym i biologiczno-chemicznym.
10 Cegiełka K., *Tematy pisemnego egzaminu dojrzałości*, Matematyka 5/6, 1984 r.

1. Wyznacz iloczyn zbiorów A i B wiedząc, że:

$$A = \left\{x\colon 2tgx \cdot sinx = \frac{1}{cosx} + tgx\right\} \qquad B = \{x\colon |log_2 x - 1| < 2\}$$

2. Dwusieczna kąta utworzonego przez proste: $3x - y + 3 = 0$ i $x + 3y + 1 = 0$ zawiera przekątną *BD* równoległoboku *ABCD* i tworzy z osią *OX* kąt ostry. Pole równoległoboku S=18, a wierzchołki *C* i *D* mają współrzędne $C(7; 7)$, $D(x_0; 2)$. Znaleźć zbiór środków okręgów stycznych zewnętrznie do krzywej $x^2 + y^2 = 4$ i przechodzących przez wierzchołek *A* tego równoległoboku.

3. Znaleźć równanie krzywej wyznaczonej przez środki cięciw paraboli $y^2 = x$ przechodzących przez punkt $A(2,0)$.

4. Sześciu pasażerów wsiada na pierwszym przystanku do tramwaju, złożonego z 3 wagonów. Zakładając, że każdy pasażer ma z tym samym prawdopodobieństwem wsiąść do dowolnego wagonu, oblicz prawdopodobieństwo, że:
   a. wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu,
   b. po dwóch pasażerów wsiądzie do jednego wagonu,
   c. przynajmniej jeden wagon zostanie pusty.

Zadania badały przede wszystkim umiejętność posługiwania się algorytmami poznanymi na lekcjach. Trudność zadań polegała głównie na zrozumieniu sytuacji opisanej tekstem i zastosowaniu wyuczonych schematów postępowania. Należy zauważyć, że bardzo często każdy kolejny etap rozwiązywania zadania zależał od wyniku etapu wcześniejszego; popełnienie na początku rozwiązywania zadania nawet drobnej pomyłki mogło skutkować niemożnością rozwiązania zadania lub rozwiązaniem błędnym. Przeważająca większość zadań nie zawierała kontekstu realistycznego. Poza zadaniami z geometrii analitycznej, które wymagały umiejętności planowania i doboru optymalnej metody rozwiązania, bardzo rzadko pojawiały się zadania wymagające modelowania matematycznego, czy tworzenia strategii. Znacznie częściej występowały takie, w których należało przeprowadzić pewne rozumowanie matematyczne. Pojawiały się zadania wymagające przeprowadzenia dowodu. Uczniowie niezwykle rzadko je wybierali, gdyż uważali za niezwykle trudne, nie tylko ze względu na konieczność samego przeprowadzenia dowodu, ale także ze względu na wymóg dokładnego opisania rozumowania zgodnie z wymaganymi regułami zapisu rozwiązań zadań maturalnych precyzyjnym językiem matematycznym.

9.2.4. Reforma wprowadzająca egzaminy na zakończenie etapów edukacyjnych

Rok 1993 zapoczątkował dziewięcioletni okres pracy nad zmianą egzaminu maturalnego. Profesor Judith Marquand z uniwersytetu w Shefield w raporcie *Studium wstępne krajowego systemu oceniania w polskim szkolnictwie ponadpodstawowym* sformułowała w 31 punktach rekomendacje dla zmian systemu edukacyjnego w Polsce. Podkreśliła, że skoro ocena umiejętności uczniów ma stanowić użyteczną informację dla świata zewnętrznego, to konieczne jest, aby była ona porównywalna pomiędzy szkołami i kuratoriami. Najpilniejszym zadaniem według raportu było podjęcie szczegółowych badań przed wprowadzeniem w życie nowego systemu. Judith Marquand uważała, że, jeżeli badania zakończą się w maju 1994 roku, to będzie możliwe utworzenie komisji egzaminacyjnych tak, aby je wykorzystać przy organizacji egzaminu w 1995 roku[11]. Jednocześnie w biuletynie informacyjnym 5/93 Ministerstwa Edukacji Narodowej zostały ogłoszone założenia reformy edukacji, które sygnalizowały powołanie w przyszłości „Agencji Egzaminów Państwowych".

W 1994 roku został powołany krajowy Program Nowa Matura mający na celu przygotowywanie szkół do zmiany egzaminów maturalnych. Początkowo obejmował cały kraj w podziale na sześć, a potem osiem Regionalnych Komisji Egzaminów Szkolnych (RKES). Te osiem Regionalnych Komisji Egzaminów Szkolnych dało początek Okręgowym Komisjom Egzaminacyjnym w 1999 roku. W 1995 roku RKES rozpoczęły szkolenia liderów wojewódzkich (w zakresie maturalnych przedmiotów egzaminacyjnych), którzy mieli za zadanie prowadzić warsztaty z przedstawicielami nauczycieli każdej szkoły.

Od 1996 roku w wyniku prac Programu Nowa Matura następowało sukcesywnie ujednolicanie kryteriów oceniania. Początkowo nauczyciele uczestniczący w programie ustalali wspólne na poziomie szkoły kryteria i starali się zgodnie z nimi oceniać. W dalszej kolejności przygotowywane przez kuratoria tematy egzaminów zawierały także proponowane kryteria oceniania. Dalej przedstawiony jest zestaw zadań egzaminacyjnych obowiązujący w liceach ogólnokształcących o profilu matematycznym Uniwersytetu Jagiellońskiego i profilu matematyczno-fizycznym w 1997 roku w Krakowie oraz kryteria do zadania 2.[12]

---

[11] Marquand J., *Studium wstępne krajowego systemu oceniania w polskim szkolnictwie ponadpodstawowym*, Policy Unit – Raport 2, PHARE Ministerstwo Edukacji Departament Kształcenia Ogólnego, Departament Współpracy z Zagranicą.

[12] Tematy i kryteria oceniania pisemnych egzaminów dojrzałości w woj. krakowskim w sesji wiosennej w roku szkolnym 1996/97. Wojewódzka Komisja Egzaminów Szkolnych przy Kuratorze Oświaty w Krakowie, Kraków 1997.

Zadanie 1 (8 pkt.)

Dla jakich wartości parametru m układ równań

$$(2m + 3)x + (1 - m^2)y = 4m^2 - 9$$
$$x + (1 - m)y = 4m - 10$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, które jest parą liczb o różnych znakach?

Zadanie 2 (10 pkt.)

Z punktu $A = (\frac{1}{2}, 3)$ poprowadzono styczne do paraboli $y = 2x - x^2$. Styczne te mają z parabolą punkty wspólne B i C. Łuk paraboli dzieli trójkąt ABC na dwie części. Oblicz stosunek pól tych części.

Zadanie 3 (10 pkt.)

Wykonujemy 3 razy następujące doświadczenie: ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych większych od 10 wybieramy losowo dwie liczby (bez zwracania). Niech A oznacza zdarzenie, że co najmniej raz wylosujemy dwie liczby, których suma jest parzysta, zaś B oznacza zdarzenie, że dokładnie raz iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzenia A i B.

Zadanie 4 (10 pkt.)

Kąt dwuścienny między dwiema sąsiadującymi ścianami ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę α. Oblicz cosinus kąta β nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Dla jakich kątów α zadanie to ma rozwiązanie?

Zadanie 5 (12 pkt.)

Dane są dwie funkcje $f(x) = 2 \cdot \ln(x + 1)$, $g(x) = \ln(kx)$ gdzie $k \in R$

Wyznacz wszystkie wartości parametru k dla których wykresy funkcji f i g:

a) nie mają punktów wspólnych,
b) mają jeden punkt wspólny,
c) mają dwa punkty wspólne.

W każdym z tych przypadków naszkicuj dla wybranego k wykresy funkcji f i g. Narysuj wykres funkcji $h(k)$, która wartościom parametru k przyporządkowuje liczbę punktów wspólnych wykresów funkcji f i g.

Proponowane kryteria do oceniania zadania 2.

Sporządzenie rysunku	1 pkt.	
Wyznaczenie punktów B i C	3 pkt.	$B = (-1;-3)$, $C = (2; 0)$
Obliczenie pola trójkąta ABC	1 pkt.	$P = \frac{27}{4}$
Obliczenie pola figury ograniczonej prostą BC i łukiem paraboli	2 pkt.	$P = \frac{9}{2}$
Obliczenie stosunku pól	1 pkt.	K = 1:2
Komentarze i sformułowanie odpowiedzi	2 pkt.	

Aż do 1999 r. następowała stopniowa modyfikacja sposobów opracowywania tematów egzaminacyjnych poprzez konieczność przygotowania wraz z zadaniami jednolitych kryteriów oceniania z wszystkich przedmiotów maturalnych. Testowanie nowej formuły egzaminu dojrzałości i szkolenie nauczycieli szkół ponadpodstawowych to główne zadania programu „Nowa Matura" w ciągu tych czterech lat jego trwania.

W 1998 roku program „Nowa Matura" został wzmocniony przez Program SMART finansowany z funduszów PHARE, który objął przedmioty przyrodnicze: chemię, fizykę i geografię. Uczestnikami SMART-u byli zarówno nauczyciele placówek oświatowych, jak i akademiccy. Program ten, poprzez warsztaty jak i wizyty studyjne w Anglii i Holandii, przygotowywał podwaliny nowych struktur w edukacji, jakimi są zewnętrzne komisje egzaminacyjne – centralna i osiem okręgowych.

15 lutego 1999 roku została opublikowana podstawa programowa, a 21 lutego 2000 r. – *Standardy wymagań egzaminacyjnych*. 21 marca 2001 r. Minister Edukacji Narodowej podpisał *Rozporządzenie o ocenianiu*, które wprowadziło matematykę jako egzamin obowiązkowy na zewnętrznej maturze począwszy od wiosennej sesji 2002 roku. Niestety w kolejnym rozporządzeniu z dnia 6 listopada 2001, podpisanym przez Minister Edukacji Narodowej prof. Krystynę Łybacką, paragraf 120 stanowi o przesunięciu zewnętrznej matury na rok szkolny 2004/2005[13].

Na początku września 2004 roku Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu w paragrafie 51.1 pkt. 2c sytuuje matematykę w koszyku przedmiotów, z których maturzysta musiał obowiązkowo wybrać jeden.

Na początku września 2004 roku Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu[14] w paragrafie 51.1 pkt. 2c sytuuje matematykę w koszyku przedmiotów, z których maturzysta musiał obowiązkowo wybrać jeden. Ponieważ przesunięcie matury zewnętrznej na 2005 rok nastąpiło już po zgłoszeniu się uczniów do nowej matury i po egzaminie próbnym, więc pozostawiono możliwość zdawania nowej matury tym, którzy zadeklarowali, że w 2002 roku chcą ją zdawać. W efekcie tych decyzji w wiosennej sesji egzaminacyjnej do zewnętrznej matury z matematyki jako egzaminu obowiązkowego zasiadło 6870 absolwentów liceów i techników, z czego 1366 osób dodatkowo przystąpiło do egzaminu na poziomie rozszerzonym. Do nowej matury przystąpili absolwenci z 719 szkół. Najczęściej zewnętrzną maturę z matematyki pisał w 2002 roku jeden uczeń ze szkoły (156 placówek), ale były też takie placówki, że wszyscy maturzyści pisali zewnętrzną maturę. W jednej ze szkół aż 161 uczniów pisało matematykę w nowej formule.

Arkusz egzaminacyjny na poziomie podstawowym składał się z 10 otwartych zadań, za których rozwiązanie w ciągu 120 minut zdający mógł otrzymać maksymalnie 40 punktów. Egzamin na poziomie rozszerzonym był kontynuacją egzaminu w części podstawowej i składał się z 9 pytań otwartych, na których rozwiązanie abiturient miał 150 minut. Za rozszerzoną część egzaminu zdający mógł uzyskać maksymalnie 60 punktów.

Na poziomie podstawowym dla wszystkich piszących nową maturę z matematyki w 2002 roku średnia łatwość arkusza egzaminacyjnego wynosiła 0,69. Oznacza to, że średni wynik uzyskany w tym egzaminie wynosił 69 procent maksymalnej liczby punktów możliwych do uzyskania.

Zdający najgorzej radzili sobie z zadaniem 9., za którego rozwiązanie można było uzyskać maksymalnie 5 punktów. Poniżej przedstawiono to zadanie.

Zaplanowano zalesić ugór w kształcie trójkąta równoramiennego, którego długość najdłuższego boku na planie w skali 1:1500 jest równa 12 cm i jeden z kątów ma miarę 120°. W szkółce leśnej zamówiono sadzonki w ilości pozwalającej obsadzić obszar wielkości 40 arów. Oblicz, czy zamówiona ilość sadzonek jest wystarczająca do zalesienia ugoru.

Z arkusza egzaminacyjnego na poziomie podstawowym to zadanie okazało się także najtrudniejsze dla zdających egzamin na poziomie rozszerzonym. Prawie 30 procent wszystkich zdających uzyskało 0 punktów za to zadanie. W pełni poprawnie to zadanie zostało rozwiązane przez 27 procent zdających nową maturę w 2002 roku.

Na poziomie rozszerzonym arkusz składał się z 9 zadań, za których rozwiązanie zdający mógł otrzymać 60 punktów. Średnia łatwość arkusza egzaminacyjnego wynosiła 0,52, co oznacza że średni wynik uzyskany w tej części egzaminu wynosił 52% maksymalnej liczby punktów możliwych do uzyskania. Dla abiturientów zdających egzamin na poziomie rozszerzonym arkusz egzaminacyjny w części podstawowej okazał się znacznie łatwiejszy niż dla tych, co zdawali obowiązkową maturę tylko na poziomie podstawowym. Wskaźnik łatwości arkusza egzaminacyjnego na poziomie podstawowym dla tych abiturientów wynosił 0,87.

Najtrudniejszym dla zdających było zadanie 3., w którym uzyskany średni wynik wynosił 0,37% wyniku maksymalnego. Tekst zadania przedstawiony jest poniżej.

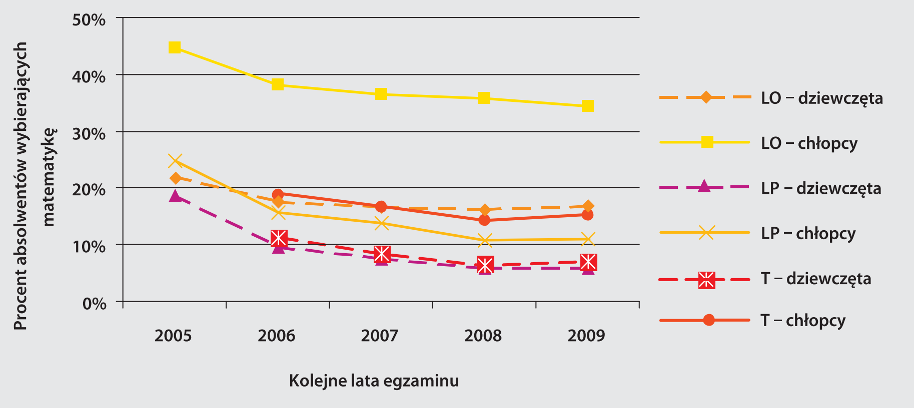
Sprawdź, że przekształcenie P płaszczyzny dane wzorem $P((x,y)) = (x + 1, -y)$ *jest izometrią. Wyznacz równanie obrazu okręgu o równaniu* $x^2 + y^2 - 2x = 0$ *w przekształceniu P.*

[13] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu dnia 6 listopada 2001 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych. Dz U Nr 128, poz. 1419 z 19 listopada 2001.

[14] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu dnia 7 września 2004 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych. Dz U Nr 199, poz. 2046 z 13 września 2004.

Za to zadanie 32% abiturientów zdających na poziomie rozszerzonym uzyskało 0 punktów. Bezbłędnie zadanie rozwiązane zostało tylko przez 11% zdających.
Aby zdać obowiązkową maturę z matematyki w 2002 roku absolwenci, którzy wybrali egzamin zewnętrzny w okręgowej komisji egzaminacyjnej, musieli uzyskać co najmniej 40% punktów możliwych do uzyskania. Tego progu w 2002 roku nie przekroczyło 13% abiturientów, którzy dobrowolnie wybrali obowiązkową zewnętrzną maturę z matematyki. Dzisiaj ten próg wynosi 30% punktów i w 2010 roku nie przekroczyło go również 13% maturzystów.
Od 2005 roku do wiosennej sesji 2010 roku zgodnie z Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z 7 września 2004 obowiązywała zewnętrzna matura, w której matematyka była jednym z egzaminów do wyboru jako trzeci obowiązkowy egzamin pisemny.
W 2005 roku zewnętrzną maturę zdawali tylko absolwenci liceów ogólnokształcących i liceów profilowanych, natomiast abiturienci techników po raz ostatni zdawali „stary" egzamin dojrzałości.
Zamieszczona poniżej tabela przedstawia, jak zmieniała się wybieralność egzaminu maturalnego z matematyki na maturze w latach 2005–2007. Procent został obliczony względem liczby absolwentów danego roku zdających obowiązkowy egzamin z języka polskiego w danym typie szkół.

Wykres 9.1. Wybór matematyki na egzaminie maturalnym w latach 2005–2009 w różnych typach szkół (łącznie w grupie egzaminów obowiązkowych i dodatkowych)



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

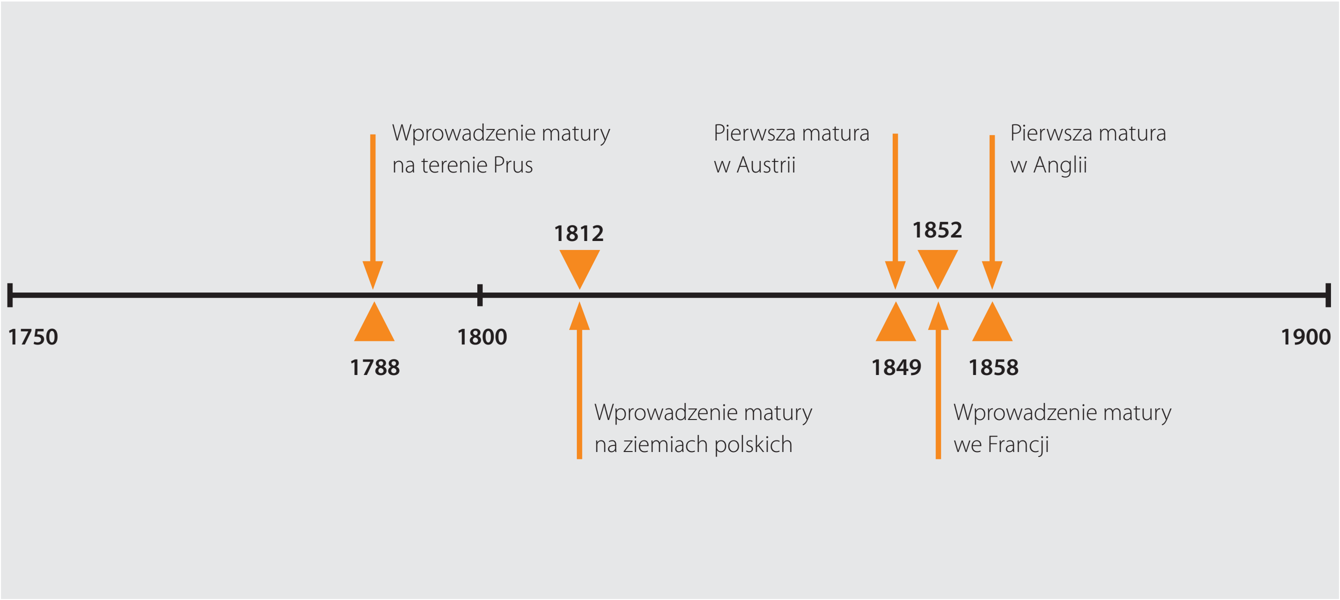
W latach 2005–2009 matematyka jako egzamin maturalny była wybierana częściej przez absolwentów liceum ogólnokształcącego niż przez absolwentów techników.

W latach 2005–2009 matematyka jako egzamin maturalny była wybierana częściej przez absolwentów liceum ogólnokształcącego niż przez absolwentów techników. Chłopcy – absolwenci LO – w przybliżeniu o 20% częściej wybierali na maturze matematykę niż ich koledzy z technikum. Dla dziewcząt ta różnica jest znacznie mniejsza. Zjawisko to spowodowane jest prawdopodobnie kilkoma czynnikami, między innymi takimi jak różnica w siatce godzin i programach matematyki w LO i technikum, a także aspiracjami w zakresie kontynuacji nauki na uczelniach wymagających dobrej znajomości matematyki.
W 2010 roku po 27 latach matematyka powróciła do kanonu obowiązkowych egzaminów.

9.2.5. Podsumowanie

W ostatnich trzech dekadach zmiany następowały zbyt często. Nie przeprowadzono gruntownych badań nad efektami, jakie były wynikiem tych zmian. Tak było zarówno w przypadku likwidacji obowiązkowej matury w 1983 roku, jak i rezygnacji z obowiązkowej matury z matematyki w zewnętrznych egzaminach maturalnych od 2005 roku. Poniżej przedstawione są schematycznie istotne wydarzenia z dziejów egzaminu maturalnego ze szczególnym wyróżnieniem matematyki. Nie są to wszystkie istotne wydarzenia. Do wielu dokumentów i opracowań jednak nie udało się jeszcze autorom dotrzeć.

Rysunek 9.1. Istotne wydarzenia w historii egzaminu dojrzałości z matematyki



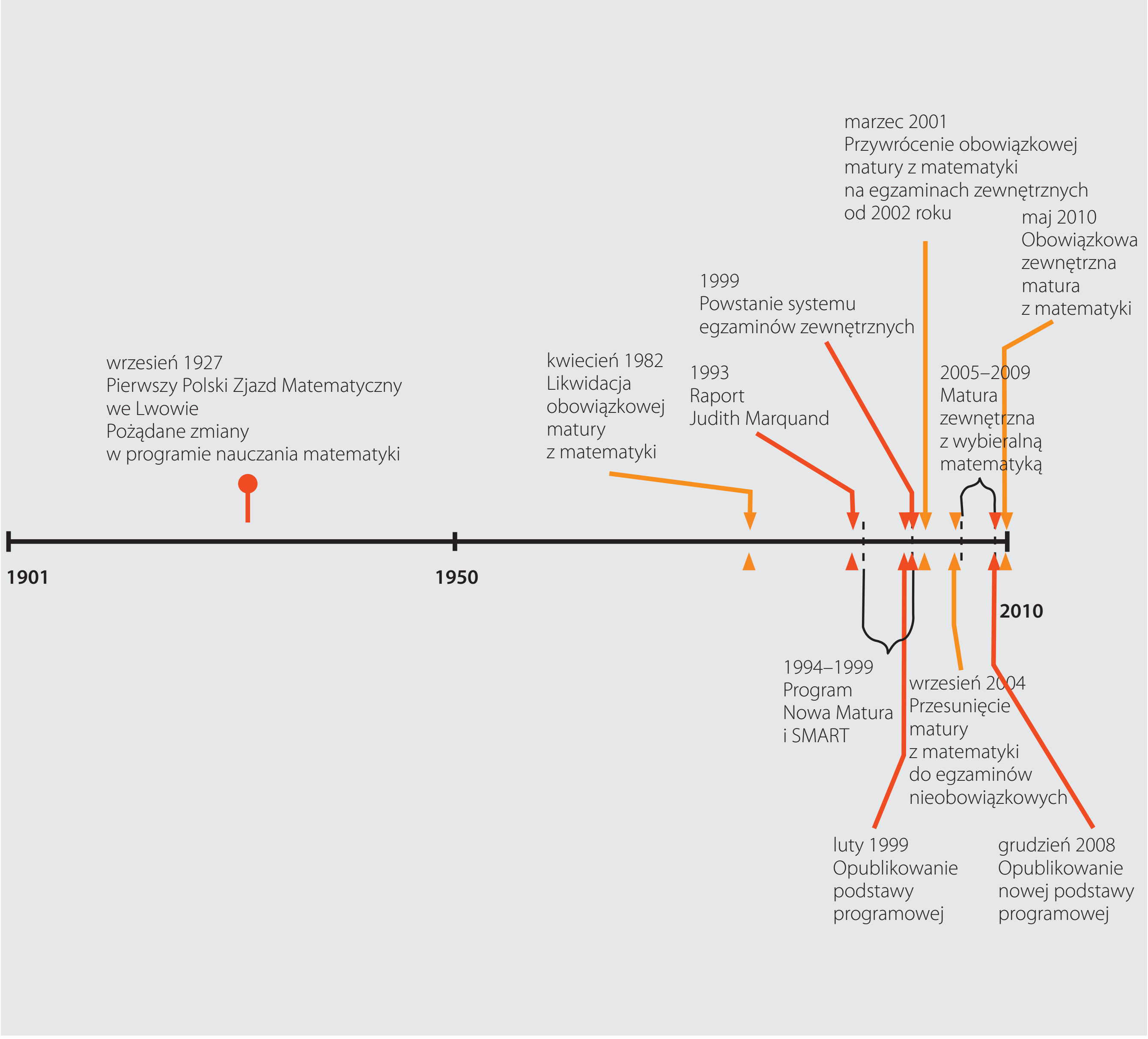


Tabela 9.1.
Syntetyczny opis zmian w egzaminie maturalnym z matematyki w ciągu ostatnich 30 lat

Matura	Czas trwania egzaminu	Kto przygotowuje zadania	Sposób oceniania
Egzamin maturalny w szkole ucznia. Do 1983 roku obowiązkowy w liceach i technikach. Wybór trzech zadań z pięciu.	5 godzin.	Zespół przy kuratorze oświaty.	Ocena przez nauczyciela uczącego w danej klasie według własnych kryteriów zgodnie z ustaleniami w szkolnym zespole przedmiotowym. Egzamin uważany był za zdany na ocenę dostateczną, gdy praca zawierała kompletne rozwiązanie jednego zadania i istotnie rozpoczęte drugie zadanie.
Od 1992 roku uczeń ma możliwość wyboru zdawania egzaminu przed zewnętrzną komisją przy kuratorze oświaty.	5 godzin.	Zespół przy kuratorze oświaty.	Ocena przez zewnętrznego egzaminatora – nauczyciela powołanego przez kuratora oświaty.
2002 rok Obowiązkowa matura z matematyki dla tych, którzy wybrali zewnętrzny egzamin. Poziom podstawowy: 10 zadań otwartych. Poziom rozszerzony: 9 zadań otwartych.	Poziom podstawowy 120 minut, poziom rozszerzony 150 minut.	OKE, CKE	Ocena według jednolitych kryteriów przez zewnętrznych egzaminatorów OKE. Próg zaliczenia – 40 procent możliwych do uzyskania punktów.
Matura 2005–2009 Zadania otwarte krótkiej i rozszerzonej odpowiedzi.	Poziom podstawowy 120 minut, poziom rozszerzony 150 minut.	OKE, CKE	Ocena według jednolitych kryteriów przez zewnętrznych egzaminatorów OKE. Próg zaliczenia – 30 procent możliwych do uzyskania punktów.
Matura 2010 Egzamin z matematyki jest obowiązkowy na poziomie podstawowym. Arkusz na poziomie podstawowym zawiera: 20–30 zadań zamkniętych. 5–10 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi. 3–4 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Na poziomie rozszerzonym arkusz zawiera tylko zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.	Zdawana jest jako egzamin obowiązkowy na poziomie podstawowym i trwa 170 minut. Jako przedmiot dodatkowy zdawana jest na poziomie rozszerzonym i trwa 180 minut.	OKE, CKE	Ocena według jednolitych kryteriów przez zewnętrznych egzaminatorów OKE. Próg zaliczenia – 30 procent możliwych do uzyskania punktów.

9.3. Obowiązkowa matura z matematyki w 2010 roku

9.3.1. Wprowadzenie

Od 1983 r. maturzyści nie musieli zdawać matematyki na maturze. W roku 2010 matematyka ponownie stała się dla maturzystów obowiązkowym przedmiotem egzaminacyjnym i, co warto podkreślić, w odróżnieniu od egzaminu sprzed 27 lat, była egzaminem zewnętrznym, tzn. prace maturalne oceniane były przez egzaminatorów nie związanych ze szkołą maturzysty. Wyniki tej matury są zatem dużo bardziej obiektywne i wiarygodne.

Przywrócenie obowiązkowej matury z matematyki wywołało wiele emocji i budziło u niektórych obawy o wyniki matury 2010 r. Jednakże maturzyści nie wypadli na maturze 2010 gorzej niż maturzyści w latach ubiegłych. Biorąc pod uwagę zdawalność, można stwierdzić, że zarówno uczniowie, jak i ich nauczyciele, stanęli na wysokości zadania.

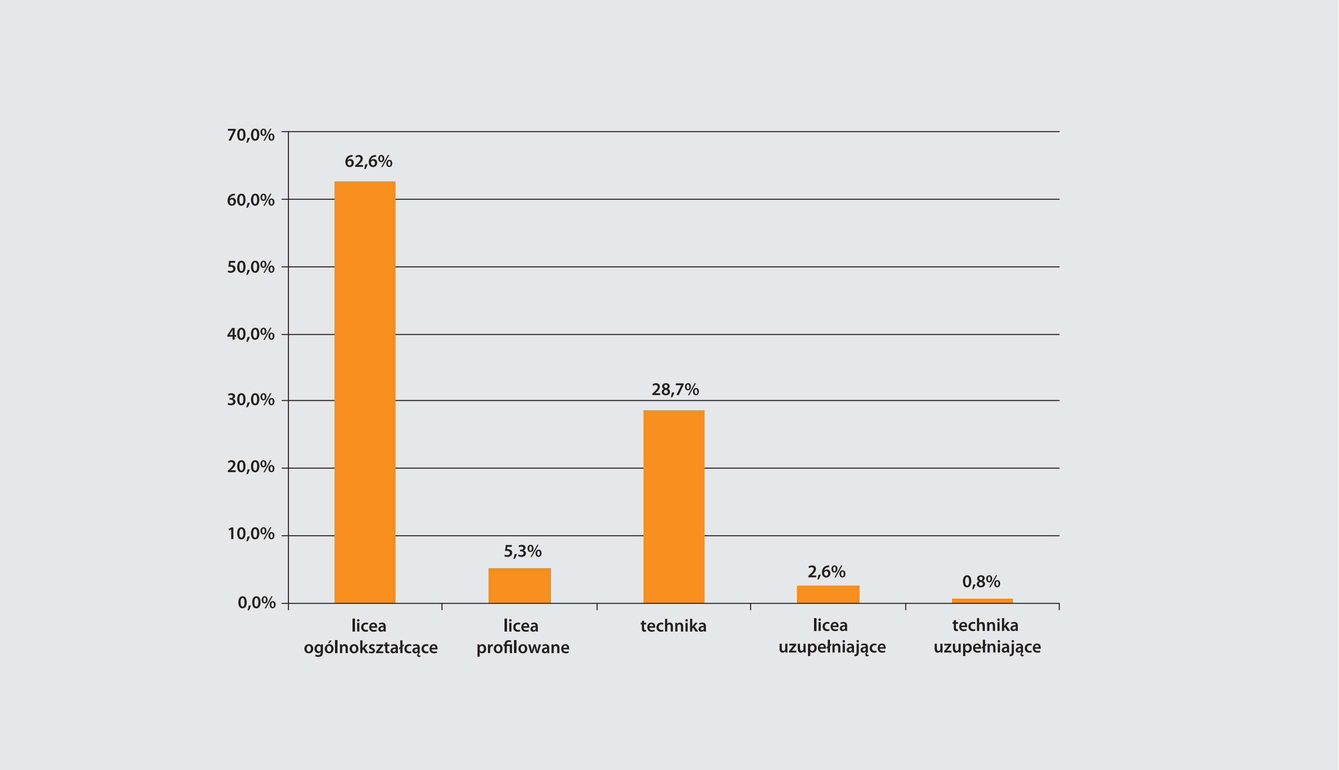
Należy również zauważyć, że zmienił się sposób oceny rozwiązań zadań otwartych na egzaminie maturalnym z matematyki. Czynnościowe ocenianie prac maturalnych zostało zastąpione ocenianiem holistycznym. Podstawowym założeniem oceniania holistycznego jest ocenianie według tego, jak daleko rozwiązujący dotarł do całkowitego rozwiązania zadania.[15]

[15] Zespół w składzie Henryk Dąbrowski, Mieczysław Fałat, Wojciech Guzicki, Zbigniew Marciniak, Anna Olechnowicz, Waldemar Rożek, Elżbieta Sepko-Guzicka, Edward Stachowski, Agnieszka Sułowska, w ramach projektu *Strategia nauczania matematyki w Polsce* opracował propozycję holistycznego schematu oceniania na poziomie maturalnym. Autorzy określili listę kategorii, do których przydzielane są rozwiązania oraz liczbę punktów odpowiadającą każdej kategorii. Zaproponowany schemat holistycznego oceniania zadań matury 2007 został próbnie zastosowany w grudniu 2007 r. na spotkaniu przewodniczących zespołów egzaminacyjnych oraz weryfikatorów egzaminu maturalnego z matematyki.

9.3.2. Zróżnicowanie wyników matury 2010

Maturę mogą zdawać uczniowie uczący się w liceum ogólnokształcącym, liceum profilowanym, technikum, liceum uzupełniającym lub technikum uzupełniającym. Maturę z matematyki w sesji wiosennej 2010 roku zdawało 365 563 uczniów, w tym 358 167 osób przystępowało to tego egzaminu po raz pierwszy, 7396 (2%) przystępowało do egzaminu po raz kolejny, bo nie zdali lub chcieli podwyższyć swój wynik uzyskany w poprzednich latach w części podstawowej lub rozszerzonej[16].
Procentowy udział zdających w 2010 r. z poszczególnych typów szkół przedstawiono na wykresie 9.2.

Wykres 9.2. Maturzyści według typów szkół (w procentach) (N = 365 563)

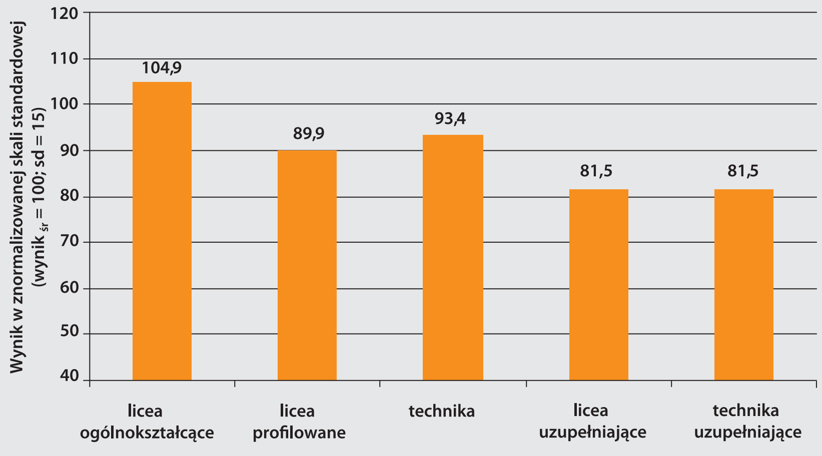


Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

Egzamin maturalny z matematyki w 2010 roku zdało 87% maturzystów. Średni wynik osiągnięty przez maturzystę zdającego egzamin na poziomie podstawowym to 58,5% możliwych do zdobycia punktów (odchylenie standardowe 23,5%). Zróżnicowanie wyników w poszczególnych typach szkół przedstawiono na wykresie 9.3.
Z wykresu widać, że tylko maturzyści z liceów ogólnokształcących uzyskali średni wynik powyżej średniego wyniku całej populacji maturzystów. Średni wynik uczniów z techników był niższy od średniej całej populacji prawie o połowę odchylenia standardowego. Najniższe wyniki, mniejsze od średniego wyniku całej populacji o ponad jedno odchylenie standardowe, uzyskali absolwenci liceów i techników uzupełniających. Świadczy to o bardzo niskim poziomie umiejętności absolwentów tych szkół.
W dalszej części raportu skupimy się tylko na tych maturzystach, którzy w roku 2010 zdawali egzamin maturalny po raz pierwszy. Takich osób było 358 167, z czego 50 348 zdawało egzamin maturalny także na poziomie rozszerzonym. W analizach dotyczących wyników matury spośród wszystkich zdających egzamin z matematyki na poziomie podstawowym wydzielimy tę grupę, która zdawała maturę również na poziomie rozszerzonym.

[16] Zdający ma prawo ponownie przystąpić do egzaminu maturalnego, zarówno w części ustnej, jak i części pisemnej, z jednego lub więcej przedmiotów w celu podwyższenia wyniku egzaminu maturalnego z tych przedmiotów lub zdania egzaminu maturalnego z przedmiotów dodatkowych. Zdający, który nie zdał egzaminu maturalnego z określonego przedmiotu lub przedmiotów w części ustnej lub części pisemnej albo przerwał egzamin maturalny, może przystąpić ponownie do części ustnej lub części pisemnej egzaminu maturalnego z tego przedmiotu lub przedmiotów w okresie 5 lat od daty pierwszego egzaminu maturalnego. §104.1. §105.1. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych.

Wykres 9.3. Zróżnicowanie wyników egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym (N=365 563)



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE. Wyniki zostały wyskalowane w ten sposób, że średnia dla całej populacji wynosi 100, a odchylenie standardowe 15.

Tabela 9.2.
Wyniki punktowe z egzaminu maturalnego z matematyki w 2010 roku

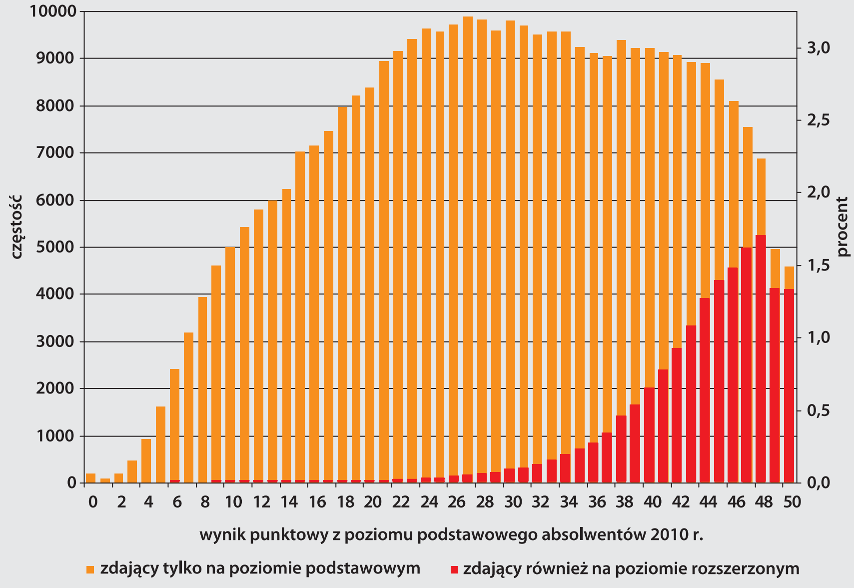
Statystyki	Poziom podstawowy			Poziom rozszerzony
	Wyniki maturzystów zdających egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym	Wyniki maturzystów zdających egzamin maturalny również na poziomie rozszerzonym	Ogółem	
Liczba maturzystów	307 817	50 348	358 165	50 348
Średni wynik	26,91	43,86	29,29	25,39
Średni wynik w skali standardowej (100;15)	97	120	100	100
Mediana	27	45	30	26
Mediana w skali standardowej (100;15)	97,38	119,29	100,49	100,89
Odchylenie standardowe	10,777	5,176	11,761	12,388
Odchylenie standardowe w skali standardowej (100;15)	13,23	9,51	15,03	14,61

W tabeli uwzględniono wyniki tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy (358 165 osób). Maksymalnie z egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym można było uzyskać 50 punktów; również na poziomie rozszerzonym maksymalnie można było uzyskać 50 punktów.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

Na wykresie 9.4. przedstawiamy rozkład wyników egzaminu na poziomie podstawowym tegorocznych absolwentów. Różnymi kolorami zaznaczono wyniki zdających tylko na poziomie podstawowym (86% absolwentów) oraz wyniki zdających także na poziomie rozszerzonym (14% absolwentów).
Warto zwrócić uwagę, jak niewielką część wśród uczniów, którzy zdobyli najwięcej punktów (49 lub 50), stanowią uczniowie, którzy zdawali egzamin wyłącznie na poziomie podstawowym. Uczniowie przygotowujący się do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym mają tak odmienne warunki kształcenia (selekcja, liczba godzin, zakres materiału) i stanowią na tyle liczną grupę, że wydaje się zadaniem niemal niemożliwym ułożenie arkusza egzaminacyjnego, który równie dobrze różnicowałby grupę uczniów zdających tylko na poziomie podstawowym i grupę zdających także na poziomie rozszerzonym.
Egzamin maturalny poziomu podstawowego składał się z 34 zadań, w tym 25 zadań zamkniętych (zadania o numerach 1–25). Każde sprawdzało umiejętności z obszarów opisanych w standardach wymagań egzaminacyjnych. Obok zadań typowych, „rutynowych" pojawiły się zadania do rozwiązania których konieczne było przeprowadzenie rozumowania matematycznego, modelowanie matematyczne, użycie lub wypracowanie strategii rozwiązania. W aneksie w tabeli 1 charakteryzujemy każde zadanie wskazując umiejętność, której opanowanie

sprawdza w odniesieniu do standardów wymagań egzaminacyjnych, oraz liczbę punktów uzyskanych za to zadanie przez obie wydzielone grupy maturzystów. W tabeli 9.3. podajemy wskaźniki łatwości zadań maturalnych poziomu podstawowego z podziałem na tych, którzy zdawali maturę tylko na poziomie podstawowym, i tych, którzy zdawali ten egzamin również na poziomie rozszerzonym.

Wykres 9.4. Rozkład wyników egzaminu maturalnego z matematyki w 2010 roku na poziomie podstawowym (dla maturzystów zdających maturę po raz pierwszy)



Na wykresie uwzględniono wyniki tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy (358 165 osób). Maksymalnie z egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym można było uzyskać 50 punktów. O zdaniu matury decydował wynik z egzaminu maturalnego z poziomu podstawowego; egzaminu nie zdały osoby, które uzyskały mniej niż 15 punktów.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

Tabela 9.3.
Wskaźniki łatwości zadań maturalnych (poziom podstawowy)

Zadanie	Maturzyści, którzy zdawali egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym (P)	Maturzyści, którzy zdawali egzamin maturalny również na poziomie rozszerzonym (R)	Iloraz P/R
1	0,61	0,93	0,66
2	0,70	0,95	0,74
3	0,93	1,00	0,93
4	0,66	0,97	0,68
5	0,89	0,99	0,90
6	0,79	0,99	0,80
7	0,88	1,00	0,88
8	0,63	0,91	0,69
9	0,73	0,97	0,75
10	0,65	0,97	0,67
11	0,84	0,97	0,87
12	0,75	0,99	0,76
13	0,46	0,78	0,59
14	0,69	0,97	0,71
15	0,60	0,91	0,66

16	0,84	0,98	0,86
17	0,46	0,86	0,53
18	0,89	0,99	0,90
19	0,51	0,84	0,61
20	0,72	0,94	0,77
21	0,81	0,99	0,82
22	0,61	0,88	0,69
23	0,80	0,96	0,83
24	0,66	0,93	0,71
25	0,93	0,99	0,94
26	0,54	0,95	0,57
27	0,55	0,95	0,58
28	0,04	0,35	0,11
29	0,53	0,89	0,60
30	0,09	0,62	0,15
31	0,39	0,85	0,46
32	0,40	0,92	0,43
33	0,28	0,70	0,40
34	0,37	0,90	0,41

Wyniki odnoszą się jedynie do zadań poziomu podstawowego dla grupy maturzystów zdających egzamin maturalny po raz pierwszy w 2010 roku.

Kolorem oznaczono zadanie bardzo trudne, kolorem zadanie trudne, kolorem zadanie umiarkowanie trudne, kolorem zadanie łatwe, kolorem zadanie bardzo łatwe. Kolorem zielonym ilorazy łatwości nie większe niż 0,6.

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Uznawaliśmy (za Bolesławem Niemierko) zadanie za: bardzo trudne, jeśli wskaźnik łatwości zadania mieścił się w przedziale 0,00–0,19; trudne – jeśli wskaźnik łatwości zadania mieścił się w przedziale 0,20–0,49; umiarkowanie trudne, jeśli wskaźnik łatwości zadania mieścił się w przedziale 0,50–0,69; łatwe – jeśli wskaźnik łatwości zadania mieścił się w przedziale 0,70–0,89; bardzo łatwe – jeśli wskaźnik łatwości zadania mieścił się w przedziale 0,90–1.

Jak widać z powyższych analiz, dla uczniów, którzy zdawali egzamin maturalny z matematyki tylko na poziomie podstawowym, dwa zadania okazały się bardzo trudne, sześć – trudnych, dwanaście – umiarkowanie trudnych, dwanaście – łatwych i dwa – bardzo łatwe. Dla uczniów zdających egzamin na obu poziomach większość zadań było bardzo łatwych, siedem okazało się łatwych, jedno umiarkowanie trudne i jedno trudne.

Z przedstawionego w tabeli porównania współczynników łatwości zadań dla uczniów zdających wyłącznie na poziomie podstawowym oraz uczniów zdających także na poziomie rozszerzonym widać, że dla wszystkich zadań otwartych (zadania o numerach 26–34) występują duże dysproporcje między wynikami tych dwóch grup uczniów. W dwóch wypadkach te dysproporcje są szczególnie duże, są to zad. 28 i zad. 30. Oba to zadania na dowodzenie.

W tabeli 9.4 zamieszczono informacje o średnim wyniku tegorocznych absolwentów z zadań każdego obszaru wymagań ogólnych opisanych w podstawie programowej z 23 grudnia 2010 roku: wykorzystania i tworzenia informacji (INF), wykorzystania i interpretowania reprezentacji (REP), modelowania matematycznego (MOD), użycia i tworzenia strategii (STR), rozumowania i argumentacji (ROZ).

Tabela 9.4.
Łatwość podtestów sprawdzających umiejętności każdego obszaru wymagań ogólnych

Wymaganie ogólne	Łatwość podtestów z poziomu podstawowego licealistów zdających tylko na poziomie podstawowym	Łatwość podtestów z poziomu podstawowego licealistów zdających na obu poziomach	Łatwość podtestów z poziomu rozszerzonego licealistów zdających na obu poziomach
INF	0,70	0,95	-
REP	0,65	0,93	-
MOD	0,37	0,83	0,58
STR	0,47	0,92	0,52
ROZ	0,07	0,48	0,40

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE. Wyniki Absolwentów 2010 (N=358 165).

Powyższe wyniki potwierdzają, że egzamin na poziomie podstawowym różnicował tylko tych, którzy zdawali matematykę wyłącznie na tym poziomie.

Pomimo że wartość wskaźnika zależy nie tylko od poziomu umiejętności uczniów, ale także łatwości zadań zastosowanych do pomiaru, możemy dokonać porównania pomiędzy dwiema grupami rozwiązującymi te same podtesty. Największa różnica łatwości podtestów wystąpiła w wypadku zadań z obszaru modelowania matematycznego, użycia i tworzenia strategii oraz obszaru rozumowania.

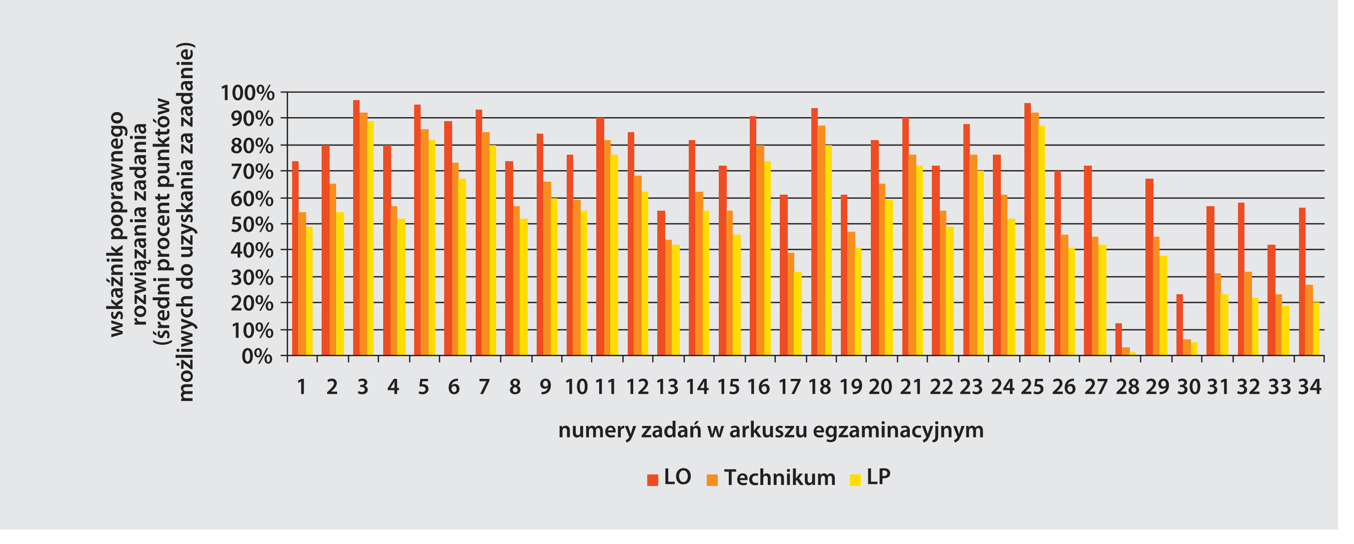
Powyższe wyniki potwierdzają, że egzamin na poziomie podstawowym różnicował tylko tych, którzy zdawali matematykę wyłącznie na tym poziomie. Osoby, które zdawały egzamin maturalny również na poziomie rozszerzonym, nie napotkały większych trudności z rozwiązaniem zadań z poziomu podstawowego; dopiero egzamin na poziomie rozszerzonym różnicował tę grupę uczniów.

Analiza wyników pozwala również stwierdzić, że w obu grupach relatywnie największe trudności napotkali maturzyści w dwóch zadaniach z obszaru rozumowania (zadanie 28 i 30). Maturzyści, którzy pisali egzamin tylko na poziomie podstawowym, uzyskali dość słabe wyniki również w dwóch zadaniach z obszaru modelowania matematycznego (zadanie 33 i 34).

Bardzo dobre wyniki uzyskali maturzyści w czterech zadaniach związanych z obszarem standardu: wykorzystanie i tworzenie informacji (zadania 3, 5,18, 25), i jednego z obszaru standardu: wykorzystanie i tworzenie reprezentacji (zadanie 7). Wskaźniki łatwości tych zadań były nie mniejsze niż 0,88.

Na wykresie 9.5 zestawiono wskaźniki poprawnego rozwiązania zadań poziomu podstawowego, a w aneksie w tabeli 2. wskaźniki łatwości zadań dla grupy uczniów zdających egzamin maturalny także na poziomie rozszerzonym z podziałem na różne typy szkół.

Wykres 9.5. Wskaźniki poprawnego rozwiązania zadań maturalnych poziomu podstawowego z podziałem na uczniów liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum

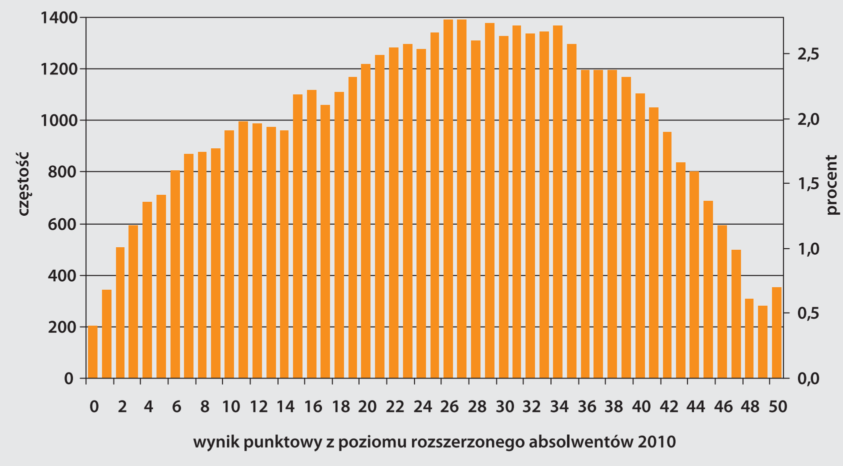


Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Duże różnice w wynikach świadczą o znacznym zróżnicowaniu umiejętności maturzystów z liceum ogólnokształcącego wobec tych z liceum profilowanego czy technikum. Zadania, w których te różnice są wyjątkowo duże, dotyczyły rozwiązywania prostego równania trzeciego stopnia (zadanie 27), zagadnień geometrycznych (zadania: 31 i 32) oraz modelowania matematycznego (zadanie 34). Należy zauważyć, że, choć zarówno dla maturzystów z liceum ogólnokształcącego, jak i technikum, którzy wybrali zdawanie egzaminu maturalnego na obu poziomach, zdanie egzaminu maturalnego nie stanowiło większych trudności, to jednak już na poziomie podstawowym potwierdził się potoczny pogląd o niższych umiejętnościach maturzystów z technikum niż z liceum. Należy też zwrócić uwagę, że zadania, w których uwidoczniły się największe różnice, dotyczą przede wszystkim tych treści i umiejętności, które pojawiają się dopiero w szkole średniej. Najmniejsze różnice wystąpiły w przypadku zadań, których rozwiązanie wymagało umiejętności nie wykraczających lub wykraczających w niewielkim stopniu poza umiejętności, które powinien posiadać uczeń kończący gimnazjum.

Egzamin z matematyki poziomu rozszerzonego składał się z 11 zadań otwartych. Kontrolowały one przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji, konstruowania odpowiedniego modelu matematycznego, tworzenia strategii rozwiązania problemu, argumentowania i prowadzenia rozumowań matematycznych. W aneksie w tabelach 3. i 4. dokonano charakterystyki tych zadań i przedstawiono ich rozwiązywalność przez maturzystów zdających maturę po raz pierwszy w 2010 roku. W zestawie tym nie było zadań bardzo trudnych, ani bardzo łatwych dla uczniów liceum ogólnokształcącego; jednakże niektóre z tych zadań były już bardzo trudne dla uczniów liceum profilowanego lub technikum. Zadania, które sprawiły najwięcej trudności, dotyczyły: obliczenia współrzędnych wierzchołka trójkąta równoramiennego, gdy dane były współrzędne jednego wierzchołka, pole trójkąta oraz równanie prostej, w której jest zawarte ramię tego trójkąta (zadanie 7), przeprowadzenia dowodu nierówności algebraicznej (zadanie 8), wyznaczenia prawdopodobieństwa zdarzenia w doświadczeniu losowym (zadanie 10), rozwiązania problemu optymalizacyjnego z wykorzystaniem własności funkcji kwadratowej (zadanie 3) i opracowania strategii postępowania prowadzącego do wyznaczenia objętości ostrosłupa przy zadanym kącie między sąsiednimi ścianami bocznymi oraz podanej długości krawędzi podstawy ostrosłupa (zadanie 11).

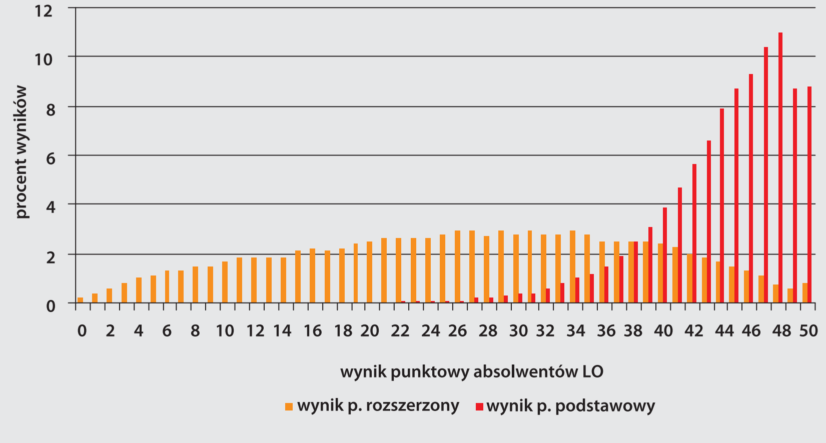
Wykres 9.6. Rozkład wyników egzaminu maturalnego z matematyki w 2010 roku na poziomie rozszerzonym



Na wykresie uwzględniono wyniki tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy. Maksymalnie z egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym można było uzyskać 50 punktów.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

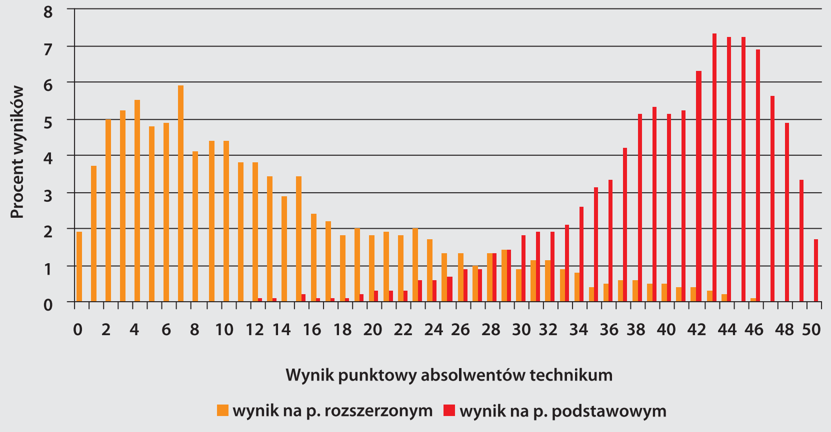
Egzamin poziomu rozszerzonego dobrze różnicował grupę maturzystów zdających egzamin na poziomie rozszerzonym. Jednocześnie ujawnił bardzo duże różnice pomiędzy wiedzą i umiejętnościami maturzystów liceum ogólnokształcącego a technikum, czy liceum profilowanego. Wykresy 9.7.–9.9. pokazują różnice wyników grup uczniów piszących egzamin maturalny na obu poziomach w zależności od typu szkół.

Wykres 9.7. Porównanie rozkładów wyników obu poziomów egzaminu absolwentów liceów ogólnokształcących zdających maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym



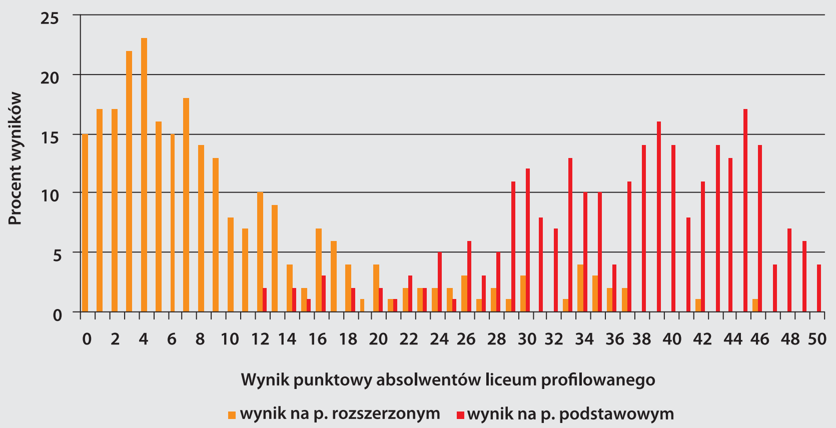
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Wykres 9.8. Porównanie rozkładów wyników obu poziomów egzaminu absolwentów techników zdających maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Wykres 9.9. Porównanie rozkładów wyników obu poziomów egzaminu absolwentów liceów profilowanych zdających maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Nasuwa się pytanie o przyczyny takiej sytuacji, które jest pytaniem otwartym. Powszechna opinia, że do technikum idą uczniowie o niższych umiejętnościach, tylko częściowo może wyjaśniać to zjawisko. Potrzebne są szersze badania nad stylem pracy nauczycieli techników i liceów profilowanych, zwłaszcza stosowanych przez nich metod nauczania, a także organizacji procesu dydaktycznego w tych szkołach.

9.3.3. Zróżnicowanie wyników ze względu na płeć

W tabeli 9.5. zestawiono średnie wyniki osób po raz pierwszy zdających maturę z matematyki z podziałem na płeć.

Tabela 9.5.
Średnie wyniki punktowe egzaminu maturalnego z podziałem na płeć

			Kobiety	Mężczyźni
Poziom podstawowy	Maturzyści ogółem	N	201 544	156 621
		wynik surowy	29,29	29,29
		wynik w skali (100;15)	100	100
	Maturzyści, którzy zdawali egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym	N	182 403	125 414
		wynik surowy	27,71	25,73
		wynik w skali (100;15)	98	95
	Maturzyści, którzy zdawali egzamin maturalny również na poziomie rozszerzonym	N	19 141	31 207
		wynik surowy	44,35	43,57
		wynik w skali (100;15)	120	119
Poziom rozszerzony	Maturzyści ogółem	N	19 141	31 207
		wynik surowy	26,47	24,73
		wynik w skali (100;15)	102	100

Wyniki odnoszą się do grupy maturzystów zdających egzamin maturalny po raz pierwszy w 2010 roku (358 165 zdających). W nawiasach podano liczebności każdej z grup.
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Na egzaminie na poziomie podstawowym kobiety osiągnęły identyczne rezultaty jak mężczyźni. Kobiety miały jednak lepsze wyniki zarówno w grupie tych maturzystów, którzy zdawali tylko na poziomie podstawowym, jak i w grupie tych, którzy zdawali także na poziomie rozszerzonym. Ten paradoks związany jest z tym, że kobiety znacznie rzadziej wybierały matematykę na poziomie rozszerzonym. Tylko 9% kobiet wybrało poziom rozszerzony, a odsetek mężczyzn był ponad dwukrotnie większy i wynosił 20%.
Przyczyn takiej sytuacji można upatrywać w tradycjach kulturowych, potocznym przekonaniu o mniejszych niż w przypadku mężczyzn wrodzonych zdolnościach matematycznych kobiet i ich niskiej samoocenie w zakresie umiejętności matematycznych, a także preferowanych przez maturzystki kierunkach studiów. Wyjaśnienie tego zjawiska wymaga dalszych, pogłębionych badań.

9.4. Umiejętności matematyczne absolwenta zdającego maturę z matematyki w 2010 roku sprawdzane na progach edukacyjnych

9.4.1. Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale omówimy niektóre zagadnienia dotyczące wyników egzaminu maturalnego z matematyki maturzystów zdających w 2010 r. egzamin maturalny po raz pierwszy w kontekście ich umiejętności wyniesionych z wcześniejszych etapów edukacyjnych. Głównym źródłem informacji będą wyniki z egzaminu maturalnego z matematyki, wyniki egzaminów gimnazjalnych z lat 2006 i 2007 oraz sprawdzianów z lat 2003 i 2004. W niektórych przypadkach sięgniemy też do rezultatów z matury próbnej.
Wyniki tutaj prezentowane będą omawiane osobno dla licealistów i uczniów technikum. Nie będziemy przy tym rozróżniać uczniów liceum ogólnokształcącego od uczniów liceum profilowanego; pisząc „liceum" mamy na myśli oba typy szkół. Ostatecznie analizie poddano wyniki 170 587 maturzystów, którzy w 2010 roku ukończyli naukę w liceum i zdawali egzamin maturalny z matematyki tylko na poziomie podstawowym, 44 247 maturzystów, którzy w 2010 roku ukończyli naukę w liceum i zdawali egzamin maturalny z matematyki na obu poziomach, 88 530 maturzystów, którzy w 2010 roku ukończyli naukę w technikum i zdawali egzamin maturalny z matematyki tylko na poziomie podstawowym, 3830 maturzystów, którzy w 2010 roku ukończyli naukę w technikum i zdawali egzamin maturalny z matematyki na obu poziomach.
Połączenia wyników ze sprawdzianu i egzaminu maturalnego dokonano w zespole EWD. Do analizy wykorzystano tę część zbioru danych, w którym wyniki można było połączyć z rezultatami dla sprawdzianu z 2003 roku dla technikum i 2004 roku dla licem ogólnokształcącego i liceum profilowanego. Jeżeli absolwent szkoły podstawowej, który wybrał liceum, zdawał maturę w 2010 roku, to znajduje się w zbiorze danych z dokładno-

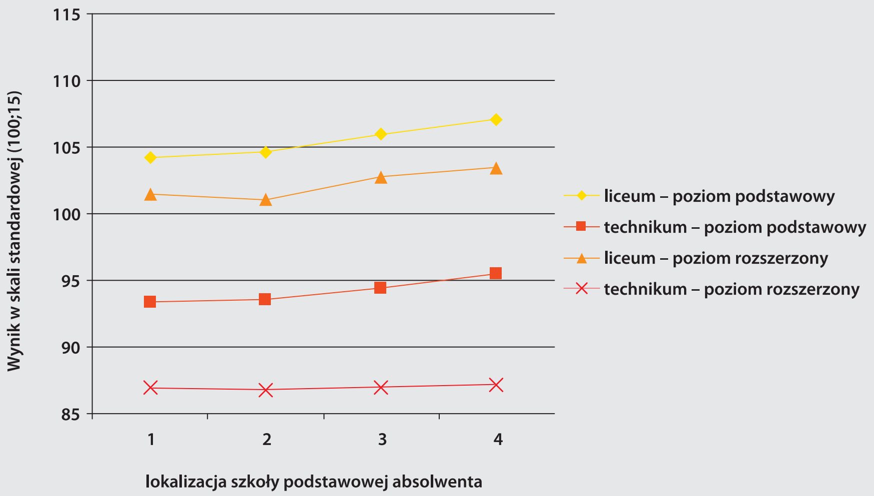
Tegoroczni absolwenci uzyskali tym lepsze wyniki, im większa była miejscowość, w której znajdowała się ukończona przez nich szkoła podstawowa.

ścią do ewentualnych błędów w identyfikatorze. Którzy absolwenci zdający maturę w 2010 roku nie znaleźli się w zbiorze analizowanych danych? Wszyscy ci, których ścieżka edukacyjna od pisania sprawdzianu do matury z różnych powodów zajęła więcej niż 7 lat dla technikum i 6 lat dla liceum.

Wyniki prezentowane w znormalizowanej skali standardowej o średniej równej 100 i odchyleniu standardowym 15 zostały unormowane oddzielnie dla arkusza na poziomie podstawowym i oddzielnie dla arkusza na poziomie rozszerzonym. Unormowania dokonano wykorzystując wyniki całej populacji zdających w sesji wiosennej 2010 egzamin maturalny z matematyki.

Tegoroczni absolwenci uzyskali tym lepsze wyniki, im większa była miejscowość, w której znajdowała się ukończona przez nich szkoła podstawowa.

Wykres 9.10. Zróżnicowanie wyników z egzaminu maturalnego licealistów z matematyki w 2010 roku w zależności od lokalizacji szkoły podstawowej, do której absolwent uczęszczał



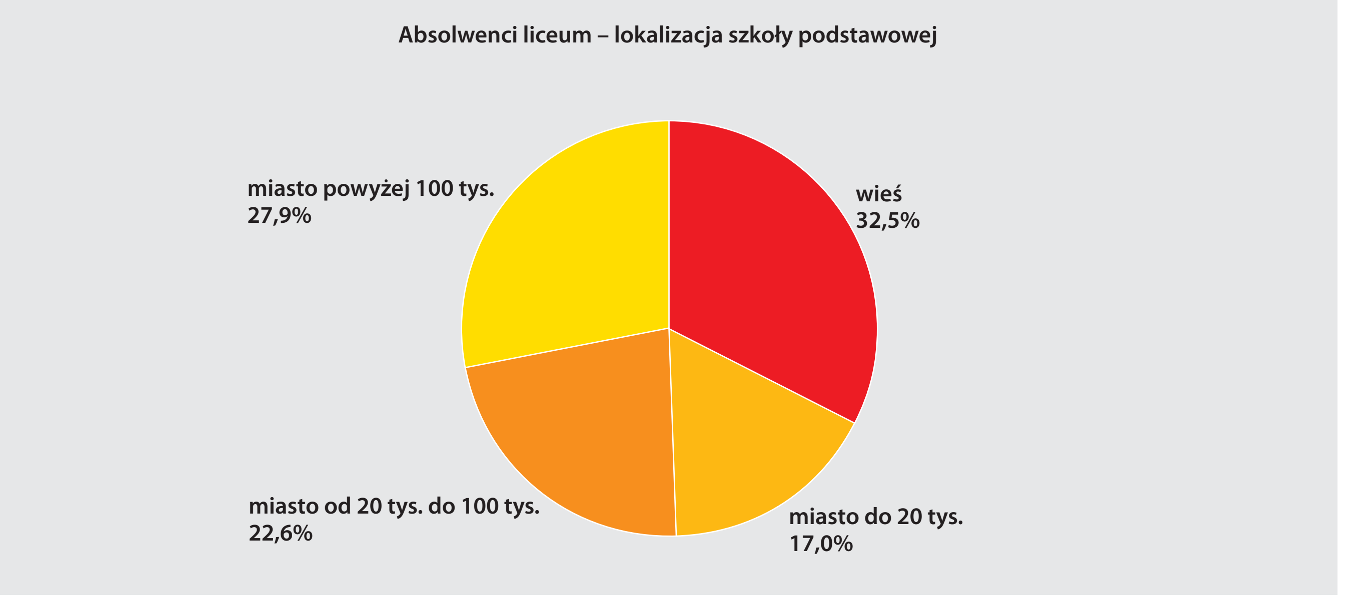
Na wykresie uwzględniono wyniki tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy i możliwe było połączenie wyników maturalnych z wynikami sprawdzianu (2003 dla technikum – 2004 dla liceum).
1 – wieś, 2 – miasto do 20 tys. mieszkańców, 3 – miasto od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców, 4 – powyżej 100 tys.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE i wyników połączonych przez zespół EWD.

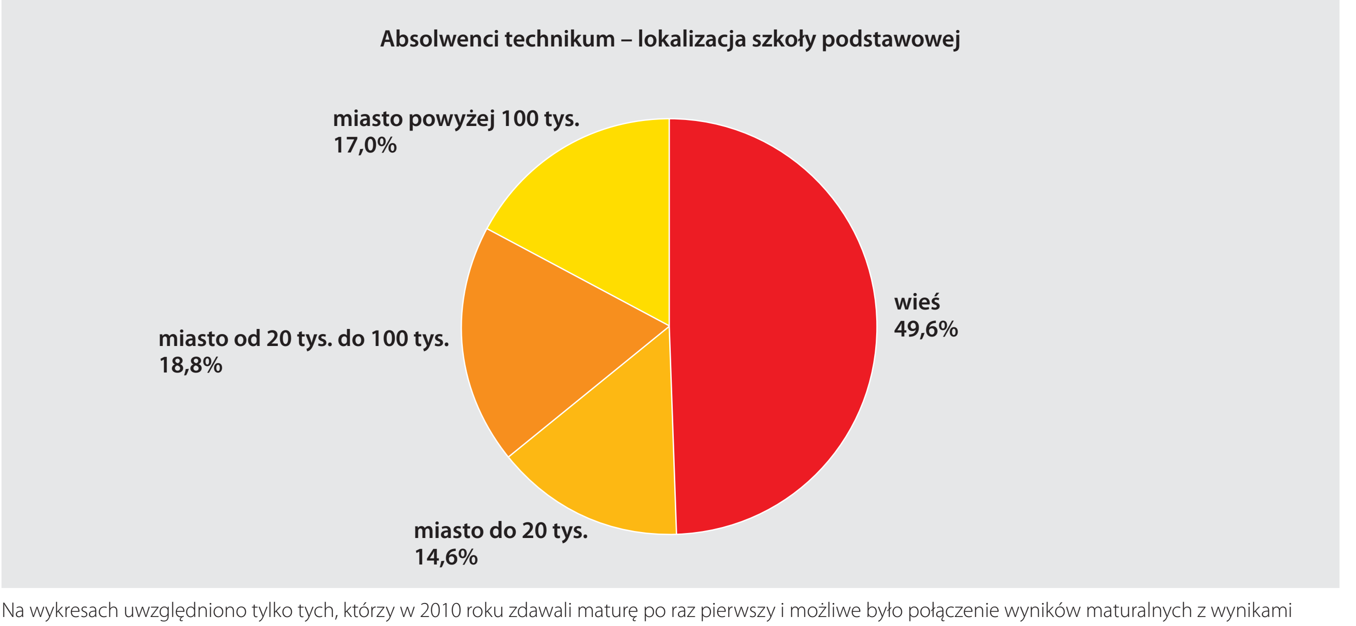
Relatywnie najgorsze wyniki w stosunku do absolwentów tego samego typu szkoły uzyskali ci, którzy ukończyli szkołę podstawową na wsi. Należy jednak zauważyć, że absolwenci liceum uzyskali wyniki wyższe niż średnia w skali standardowej, natomiast absolwenci technikum wyniki niższe niż średnia, bez względu na to, czy ukończyli szkołę podstawową znajdującą się na wsi, czy w mieście. Natomiast w przypadku absolwentów technikum lokalizacja szkoły podstawowej nie miała wpływu na wynik matury rozszerzonej.

W różnych typach szkół inaczej rozkładają się odsetki uczniów w zależności od lokalizacji szkoły podstawowej, do której uczęszczali (wykres 9.11.). Niemal połowa tegorocznych absolwentów techników chodziła do szkoły podstawowej na wsi, a w liceach 1/3 absolwentów szkołę podstawową ukończyła na wsi.

Porównanie wyników na kolejnych progach edukacyjnych i zbadanie rozwoju umiejętności matematycznych nastręcza obiektywne trudności. Po pierwsze, w ubiegłych latach tego typu badania nie były prowadzone. Zadania egzaminacyjne nie były tak konstruowane i dobierane, aby badać przyrost wiedzy i umiejętności matematycznych, ale by sprawdzać stan wiedzy i umiejętności po kolejnych etapach edukacyjnych zgodnie z obowiązującymi standardami wymagań egzaminacyjnych. Ponadto wśród tegorocznych maturzystów można wydzielić dwie kohorty – absolwentów liceum ogólnokształcącego i liceum profilowanego, którzy pisali sprawdzian w 2004 roku i zdawali egzamin gimnazjalny w 2007 roku, oraz absolwentów technikum, którzy pisali sprawdzian w 2003 roku i zdawali egzamin gimnazjalny w 2006 roku. Na egzaminach zewnętrznych pojawiały się zadania sprawdzające różne umiejętności i dlatego porównywanie wyników egzaminów z różnych lat jest trudne lub wręcz niemożliwe. Ponadto w testach sprawdzianu i egzaminu gimnazjalnego nie były explicite wydzielone zadania matematyczne. Niektóre z zadań były z pogranicza różnych przedmiotów szkolnych. Chociaż niektóre zadania były ściśle związane z innym niż matematyka przedmiotem szkolnym, to jednak ich rozwiązanie wymagało umiejętności matematycznych. Ponadto ze zbioru danych tegorocznych maturzystów należało wykluczyć tych, którzy zdawali sprawdzian lub egzamin gimnazjalny w innych latach, niż przewidziany dla danego rocznika (np. uczniów drugorocznych).

Wykres 9.11. Podział absolwentów ze względu na lokalizację szkoły podstawowej, do której uczęszczali





Na wykresach uwzględniono tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy i możliwe było połączenie wyników maturalnych z wynikami sprawdzianu (2003 dla technikum – 2004 dla liceum) – 89 procent maturzystów, absolwentów 2010 liceów i techników.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE i wyników połączonych przez zespół EWD.

Zadania ze sprawdzianów i egzaminów gimnazjalnych części matematyczno-przyrodniczej wybrane do analiz zawarto w tabeli 9.6.

Tabela 9.6.
Zadania ze sprawdzianów i egzaminów gimnazjalnych części matematyczno-przyrodniczej wybrane do analiz

Egzamin zewnętrzny	Rok	Numery zadań z arkuszy egzaminacyjnych wybrane do analiz
Sprawdzian	2003	5, 8, 17, 18, 20, 21, 22, 23
	2004	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 24, 25
Egzamin gimnazjalny (część matematyczno-przyrodnicza)	2006	1, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31
	2007	4, 7, 8, 9,10,11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 28, 29, 30, 32, 33

Źródło: opracowanie własne.

W aneksie w tabelach 5–6 zawarto szczegółowe informacje o obszarze standardów, którego zadanie dotyczyło maksymalnej liczby punktów możliwych do otrzymania za jego rozwiązanie oraz odsetku uczniów z daną liczbą punktów.

9.4.2. Porównanie wyników licealistów i uczniów technikum, którzy w 2010 r. zdawali egzamin maturalny

Maturzyści w 2010 r., zdający na obu poziomach, zarówno w liceum ogólnokształcącym jak i w technikum, bardzo dobrze poradzili sobie z zadaniami z poziomu podstawowego (rozkłady są lewoskośne), natomiast duże zróżnicowanie wyników obu grup wystąpiło w przypadku egzaminu na poziomie rozszerzonym. O ile rozkład wyników matury poziomu rozszerzonego uczniów liceum ogólnokształcącego jest zbliżony do rozkładu normalnego, to rozkład uczniów technikum jest silnie prawoskośny (zob. wykresy 9.7. i 9.8.). Jakie są przyczyny takiego stanu? Czy potoczna opinia, że do technikum idą osoby o niższych umiejętnościach niż do liceum, jest słuszna i czy wystarczająco wyjaśnia wyniki matury z matematyki poziomu rozszerzonego?
Aby odpowiedzieć na te pytania, przyjrzyjmy się bliżej wynikom licealistów i uczniów technikum na kolejnych egzaminach zewnętrznych. Wyniki zaprezentowane poniżej odnoszą się tylko do części tegorocznych maturzystów – tych, dla których udało się połączyć wyniki ze sprawdzianu i egzaminu gimnazjalnego. Poza tym w analizach uwzględniono tylko te zadania, w których uczniowie musieli wykazać się wiedzą i umiejętnościami matematycznymi (zob. tabela 9.6.). Przy analizie tych danych należy pamiętać, że maturzyści z liceów zdawali egzaminy na wcześniejszych etapach nauczania w innych latach niż maturzyści z techników.

Tabela 9.7.
Wyniki licealistów i uczniów technikum zdających egzamin maturalny w 2010 po raz pierwszy i tylko na poziomie podstawowym na wcześniejszych egzaminach zewnętrznych

Statystyki	Licealiści			Uczniowie technikum		
	Wyniki sprawdzianu w 2004 r. z zadań matematycznych	Wyniki z egzaminu gimnazjalnego w 2007 r. z zadań matematycznych	Wyniki z matury z matematyki w 2010 r. – poziom podstawowy	Wyniki sprawdzianu w 2003 r. z zadań matematycznych	Wyniki z egzaminu gimnazjalnego w 2006 r. z zadań matematycznych	Wyniki z matury z matematyki w 2010 r. – poziom podstawowy
Liczba maturzystów	170 587	170 587	170 587	88 530	88 530	88 530
Braki danych	6,6%	0,4%	0%	7,3%	0,2%	0%
Obserwacje uwzględnione	159 389	169 929	170 587	82 058	88 352	88 530
Średni wynik procentowy z analizowanych zadań	55%	51%	62%	65%	45%	47%
Odchylenie standardowe	3,46	6,57	9,76	2,75	4,63	9,65
Maksimum punktów do uzyskania	14	30	50	13	28	50
Odsetek uczniów, którzy uzyskali maksymalną liczbę punktów	4,2%	1,0%	0,3%	4,1%	0,04%	0,02%

W tabeli uwzględniono wyniki tylko tych absolwentów liceum, którzy w roku 2004 pisali sprawdzian, w 2007 egzamin gimnazjalny oraz tych uczniów technikum, którzy w roku 2003 pisali sprawdzian, w 2006 egzamin gimnazjalny, a w 2010 roku egzamin maturalny po raz pierwszy tylko na poziomie podstawowym.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE i OKE.

Tabela 9.8.
Wyniki licealistów i uczniów technikum zdających egzamin maturalny w 2010 po raz pierwszy i na obu poziomach na wcześniejszych egzaminach zewnętrznych

Statystyki	Licealiści				Uczniowie technikum			
	Wyniki sprawdzianu w 2004 r. z zadań matematycznych	Wyniki z egzaminu gimnazjalnego w 2007 r. z zadań matematycznych	Wyniki z matury z matematyki w 2010 r. – poziom podstawowy	Wyniki z matury z matematyki w 2010 r. – poziom rozszerzony	Wyniki sprawdzianu w 2003 r. z zadań matematycznych	Wyniki z egzaminu gimnazjalnego w 2006 r. z zadań matematycznych	Wyniki z matury z matematyki w 2010 r. – poziom podstawowy	Wyniki z matury z matematyki w 2010 r. – poziom rozszerzony
Liczba maturzystów	44 247	44 247	44 247	44 247	3830	3830	3830	3830
Braki danych	7,4%	0,5%	0%	0%	7,1%	0,3%	0%	0%
Obserwacje uwzględnione	40 994	44 015	44 247	44 247	3558	3819	3830	3830
Średni wynik procentowy z analizowanych zadań	78%	78%	89%	53%	82%	69%	80%	27%
Odchylenie standardowe	2,74	4,87	4,76	11,90	1.93	4,34	6,65	10,31
Maksimum punktów do uzyskania	14	30	50	50	13	28	50	50
Odsetek uczniów, którzy uzyskali maksymalną uzyskaną liczbę punktów	18,3%	8,7%	8,8%	0,8%	15,5%	1,2%	18%	0,03%

W tabeli uwzględniono wyniki tylko tych absolwentów liceum, którzy w roku 2004 pisali sprawdzian, w 2007 egzamin gimnazjalny oraz tych uczniów technikum, którzy w roku 2003 pisali sprawdzian, w 2006 egzamin gimnazjalny, a w 2010 roku egzamin maturalny po raz pierwszy na obu poziomach.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE i OKE.

Wydaje się zasadne postawienie hipotezy, że uczniowie technikum mają potencjał intelektualny zbliżony do uczniów liceum, jednakże ich możliwości intelektualne i uzdolnienia matematyczne nie zostały w technikum wystarczająco wykorzystane, a nawet w dużej mierze zmarnowane.

Porównanie wyników licealistów z wynikami maturzystów z techników zdających egzamin maturalny z matematyki wyłącznie na poziomie podstawowym, pokazuje, że nie tylko średni wynik matury dla uczniów techników jest dużo niższy (o ponad 15 punktów procentowych), ale też rozkłady wyników istotnie się od siebie różnią. Uczniów, którzy zdobyli mniej niż 15 punktów (próg zdawalności), w liceach było 6,2%, a w technikach aż 19,2%.

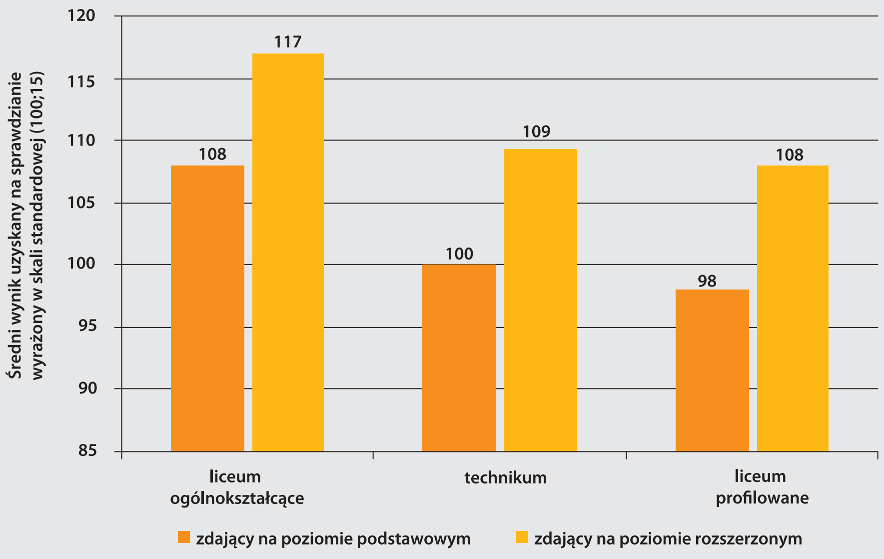
Zarówno uczniowie liceum, jak i technikum, którzy zdawali egzamin maturalny na obu poziomach, uzyskali bardzo wysokie wyniki z egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym – ten zestaw zadań nie różnicował uczniów najzdolniejszych. Co więcej wyniki tej grupy uczniów technikum z matury z poziomu podstawowego wskazują, że w technikum ugruntowali oni wiedzę i rozwinęli umiejętności wyniesione z gimnazjum. Jednakże średni wynik ucznia technikum z matury poziomu rozszerzonego to ok. 27% punktów możliwych do uzyskania, a średni wynik ucznia liceum to ok. 53%. W liceach połowę lub więcej punktów zdobyło 58% uczniów zdających ten egzamin, a w technikach tylko 16%. Ten stan rzeczy niewątpliwie zmniejsza szansę uzdolnionych matematycznie uczniów techników na studiowanie na dobrych uczelniach.

Wydaje się zasadne postawienie hipotezy, że uczniowie technikum mają potencjał intelektualny zbliżony do uczniów liceum, jednakże ich możliwości intelektualne i uzdolnienia matematyczne nie zostały w technikum wystarczająco wykorzystane, a nawet w dużej mierze zmarnowane.

9.4.3. Umiejętności maturzystów

Na wykresie 9.12. przedstawiamy wyniki ze sprawdzianu maturzystów z 2010 r. z uwzględnieniem typu ukończonej szkoły średniej.

Wykres 9.12. Wyniki ze sprawdzianu maturzystów z 2010 r. wyrażone w skali standardowej (100;15)



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE i wyników połączonych przez zespół EWD. Wyniki sprawdzianu 2004 i 2003 przyjęto jako równoważne po zrównaniu z zastosowaniem zewnętrznego testu kotwiczącego i programu PARSCAILE. Na wykresie uwzględniono wyniki tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy i możliwe było połączenie wyników maturalnych z wynikami sprawdzianu (2003 dla technikum – 2004 dla liceum).

Naukę w technikum lub liceum profilowanym podjęły osoby, które na sprawdzianie uzyskały niższe wyniki niż te, które kontynuowały naukę w liceum ogólnokształcącym. Należy jednak zauważyć, że ci, którzy egzamin maturalny z matematyki zdawali na obu poziomach, na sprawdzianie uzyskali wyniki powyżej średniej całej populacji; wyniki uczniów liceum ogólnokształcącego były wyższe o więcej niż jedno odchylenie standardowe, a technikum i liceum profilowanego o więcej niż połowę odchylenia standardowego.

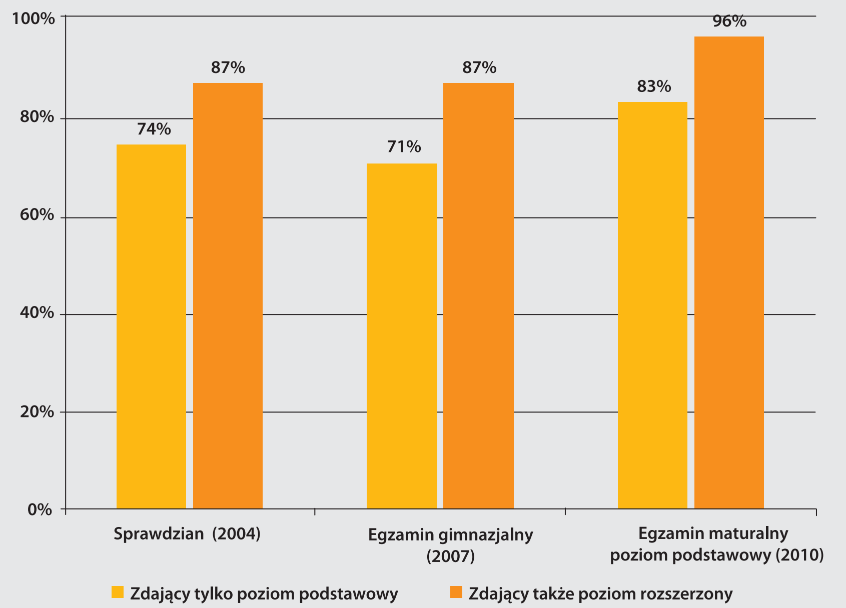
Głównym celem nauczania matematyki nie jest nauczenie uczniów rozwiązywania konkretnych zadań, ale przygotowanie ich do funkcjonowania w społeczeństwie i radzenia sobie ze złożonością i niepewnością zjawisk w różnych sytuacjach. Dlatego staraliśmy się również określić stopień opanowania przez uczniów umiejętności prostych i złożonych. W tym celu dokonaliśmy podziału zadań sprawdzianu, egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego na zadania:

- sprawdzające wiadomości i opanowanie prostych procedur matematycznych,
- w których trzeba się wykazać opanowaniem złożonych procedur,
- wymagające głównie rozumowania matematycznego.

Podobnie jak poprzednio analizowaliśmy wyniki tych uczniów liceum ogólnokształcącego lub liceum profilowanego, którzy w 2010 roku zdawali po raz pierwszy egzamin maturalny.

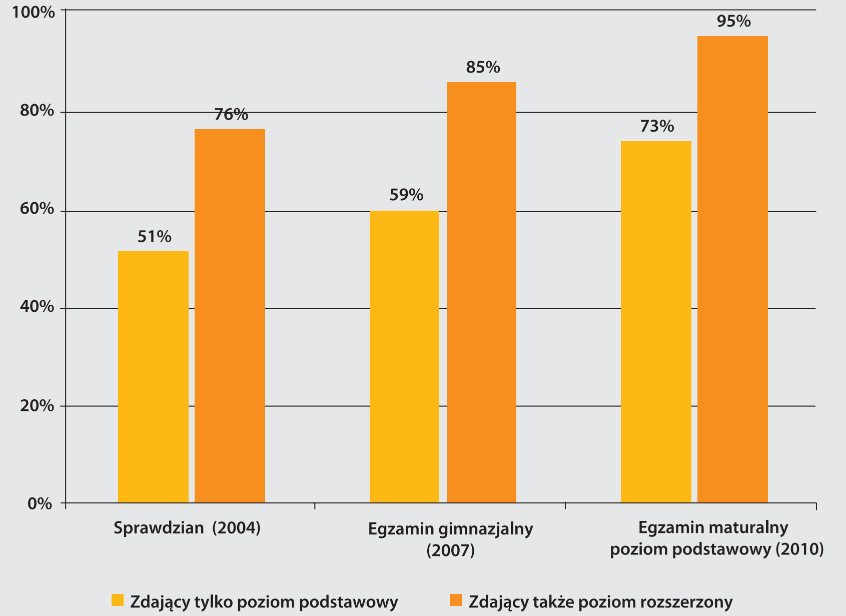
Okazuje się, że uczniowie liceum, którzy w 2010 r. zdawali maturę na poziomie rozszerzonym, stanowią grupę, która już sześć lat wcześniej osiągała wyraźnie lepsze wyniki od grupy pozostałych uczniów liceum. Różnica w opanowaniu badanych umiejętności jest między tymi grupami na każdym etapie nauczania tym większa, im bardziej złożona jest badana umiejętność. W wypadku rozważanych, konkretnych umiejętności ta różnica nie zmieniała się istotnie między kolejnymi etapami edukacyjnymi.

Wykres 9.13. Procent licealistów, którzy poprawnie rozwiązali na egzaminach po szkole podstawowej, gimnazjum i liceum zadania sprawdzające wiadomości i opanowanie prostych procedur



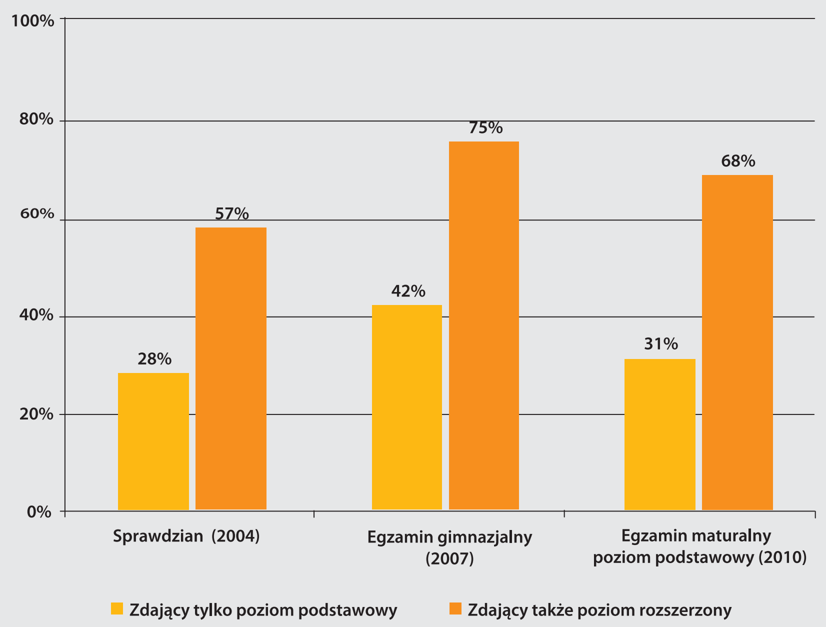
Na wykresie uwzględniono wyniki tylko tych absolwentów liceum, którzy w roku 2004 pisali sprawdzian, w 2007 egzamin gimnazjalny, a w 2010 roku egzamin maturalny.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

Wykres 9.14. Procent uczniów, którzy poprawnie rozwiązali na egzaminach po szkole podstawowej, gimnazjum i liceum zadania sprawdzające opanowanie złożonych procedur



Na wykresie uwzględniono wyniki tylko tych absolwentów liceum, którzy w roku 2004 pisali sprawdzian, w 2007 egzamin gimnazjalny, a w 2010 roku egzamin maturalny.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

Wykres 9.15. Procent uczniów, którzy poprawnie rozwiązali na egzaminach po szkole podstawowej, gimnazjum i liceum zadania, sprawdzające umiejętność rozumowania matematycznego



Na wykresie uwzględniono wyniki tylko tych absolwentów liceum, którzy w roku 2004 pisali sprawdzian, w 2007 egzamin gimnazjalny, a w 2010 roku egzamin maturalny.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

Łączna analiza powyższych wykresów pozwala wnosić, iż w grupie uczniów, którzy pisali maturę tylko na poziomie podstawowym, zwiększała się liczba uczniów potrafiących posługiwać się coraz bardziej złożonymi procedurami, natomiast rozumienie pojęć i rozumowanie to umiejętności dostępne niewielkiej części z tych uczniów (od szkoły podstawowej do matury).
Wyciąganie wniosków na temat opanowania szczegółowych umiejętności matematycznych na podstawie jednego zadania nie jest sensowne. Dlatego staraliśmy się analizować takie umiejętności, które reprezentowane były na maturze lub innych egzaminach końcowych większą liczbą zadań. Zadania zamknięte w arkuszach egzaminów zewnętrznych są mniej złożone, sprawdzają opanowanie dość konkretnych umiejętności. Zwróćmy uwagę, że wśród 25 zadań zamkniętych z egzaminu maturalnego z matematyki poziomu podstawowego aż 12 było takich, do których rozwiązania wystarczyły umiejętności nabyte w gimnazjum. Są to zadania o numerach 2, 3, 5, 6, 13, 15, 16, 18, 22, 23, 24, 25. W tabeli 9.9. zamieszczamy informacje dotyczące rozwiązywalności zadań, których rozwiązanie nie wymagało umiejętności wykraczających poza poziom gimnazjum, oraz zadań wymagających umiejętności nauczanych w liceum. Dane dotyczą uczniów zdających maturę wyłącznie na poziomie podstawowym.

Tabela 9.9.
Rozwiązywalność zadań zamkniętych egzaminu maturalnego w 2010 roku na poziomie podstawowym przez maturzystów, którzy zdawali egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym

Rodzaj zadań	Średni procent uczniów, którzy rozwiązali zadania	
	w liceum	w technikum
Zadania, do których rozwiązania wystarczy wiedza z gimnazjum	81,3%	71,9%
Zadania, do których rozwiązania potrzebna jest wiedza z liceum/technikum	78,2%	64,5%

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE.

Z danych tych możemy wnioskować, że zarówno uczniowie liceum, jak technikum mają lepiej opanowane umiejętności wyniesione z gimnazjum niż te, które nabyli w szkole średniej.
Przyjrzyjmy się bliżej jednej z umiejętności szczegółowych, której poziom opanowania jest badany na każdym egzaminie zewnętrznym i która jest potrzebna w życiu codziennym, a mianowicie obliczeniom procentowym.

9.4. Umiejętności matematyczne absolwenta zdającego maturę z matematyki w 2010 roku sprawdzane na progach edukacyjnych

Wiele badań monograficznych wskazuje na trudności związane z nauczaniem procentów oraz brak wystarczającej wiedzy i umiejętności wykonywania obliczeń procentowych przez uczniów na każdym etapie nauczania, a nawet osób, które ukończyły edukację szkolną. Jak trudne i skomplikowane jest to zagadnienie, może świadczyć fakt, iż w kolejnych podstawach programowych naukę tych treści przesuwano na różne etapy edukacyjne. W podstawie programowej obowiązującej przed 2007 r. nauka o procentach rozpoczynała się na drugim etapie edukacyjnym. Uczniowie poznawali procenty w sytuacjach praktycznych, ale też uczyli się obliczać (czasami zgodnie z podanymi z góry regułami), ile procent jednej liczby stanowi druga liczba, zadany procent danej liczby i liczbę, gdy dany jest jej procent. Warto zauważyć, że tegoroczni maturzyści właśnie tak rozpoczynali naukę o procentach. Podstawa programowa z 23 sierpnia 2007 r. przesunęła te treści do gimnazjum, co wywołało falę krytyki. Zgodnie z podstawą programową z 23 grudnia 2008 r. nauka o procentach wróciła na II etap edukacyjny, ale jedynie w kontekście praktycznych zastosowań. Uczeń szkoły podstawowej powinien wiedzieć, że np. 50% z 246 zł to połowa tej kwoty czyli 123 zł, 25% metra to jedna czwarta metra czyli 25 cm, a 1% zysku to jedna setna zysku. Nie jest natomiast wymagana (a nawet nie jest zalecana) znajomość reguł dotyczących obliczeń procentowych.

Tegoroczni maturzyści z obliczeniami procentowymi spotykali się już od szkoły podstawowej. Przez co najmniej siedem lat mieli okazje rozwiązywać wiele zadań, w których pojawiały się mniej lub bardziej skomplikowane obliczenia procentowe w różnych kontekstach. Procentami uczniowie posługiwali się też na lekcjach chemii, geografii, czy fizyki. W tabeli 9.10. przedstawiamy odsetek poprawnych odpowiedzi na zadania związane z procentami na kolejnych egzaminach zewnętrznych.

Tabela 9.10.
Rozwiązywalność zadań dotyczących obliczeń procentowych na kolejnych egzaminach zewnętrznych (w przypadku zadań zamkniętych – odsetek poprawnych odpowiedzi, w przypadku zadań otwartych – odsetek uczniów z odpowiednią dodatnią liczbą punktów)

	Numer zadania		Zdający egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym	Zdający egzamin maturalny na obu poziomach
Licealiści			N=170 587	N=44 247
	Sprawdzian (2004)			
	7		57,4%	79,7%
	Egzamin gimnazjalny (2007)			
	4		41,0%	70,9%
	8		29,8%	57,3%
	11		98,0%	99,1%
	1		60,4%	86,0%
	Egzamin maturalny (2010)			
	2		75,5%	95,5%
Uczniowie technikum			N=88 530	N=3830
	Sprawdzian (2003)			
	17		57,2%	79,5%
	23		18,8%	46,1%
	Egzamin gimnazjalny (2006)			
	17		55,2%	82,5%
	19		86,6%	98,8%
	31	1	75,9%	96,5%
		2	61,2%	85,6%
		3	20,3%	62,5%
		4	14,5%	50,1%
	Egzamin maturalny (2010)			
	2		64,0%	91,9%

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE i OKE.

9.4. Umiejętności matematyczne absolwenta zdającego maturę z matematyki w 2010 roku sprawdzane na progach edukacyjnych

Na próbnym egzaminie maturalnym umiejętność ta badana była dwoma zadaniami:

Zadanie 2 (*1 pkt*)

Na seans filmowy sprzedano 280 biletów, w tym 126 ulgowych. Jaki procent sprzedanych biletów stanowiły bilety ulgowe?

A. 22% **B.** 33% **C.** 45% **D.** 63%

To zadanie rozwiązało 93% piszących.

Zadanie 3 (*1 pkt*)

6% liczby x jest równe 9. Wtedy

A. $x = 240$ **B.** $x = 150$ **C.** $x = 24$ **D.** $x = 15$

To zadanie rozwiązało 92% piszących.

Powyższa analiza pokazuje, że uczniowie mają dobrze opanowane reguły dotyczące obliczeń procentowych, których mogą nauczyć się na pamięć i potrafią mechanicznie je stosować. Rozwiązywalność typowych zadań, których tekst sugeruje, jaką regułę zastosować, jest bardzo wysoka. Również zadania dotyczące porównywania wielkości procentowych liczonych od tej samej podstawy charakteryzowały się wysokim odsetkiem poprawnych odpowiedzi.

Modyfikacja tekstu zadania, dodanie realnego kontekstu lub konstrukcja zadania tak, aby kontrolowało ono rozumienie pojęcia procentu, powoduje znaczący spadek rozwiązywalności.

Na przykład na właściwym egzaminie maturalnym sprawdzano umiejętność posługiwania się procentami jednym zadaniem:

Zadanie 2 (*1 pkt*)

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

A. 163,80 zł **B.** 180 zł **C.** 294 zł **D.** 420 zł

To zadanie rozwiązało 73% wszystkich zdających tegoroczną maturę. Zaledwie 73%, bo to oznacza, że 27% maturzystów nie potrafi w życiu codziennym skorzystać z najprostszych wiadomości i umiejętności matematycznych nauczanych przez wiele lat. Z matematycznego punktu widzenia zadanie 3 na próbnej maturze i zadanie maturalne niewiele się różnią. Jednakże wyniki na maturze były znacznie gorsze niż na próbnej maturze, co musi oznaczać, że w zadaniu maturalnym kryła się dla uczniów dodatkowa trudność. W zadaniu maturalnym pojawił się kontekst praktyczny oraz problem związany z rozumieniem, czym jest obniżka o podany procent. Zwrot „obniżka o ileś procent", jak pokazują wyniki różnych badań monograficznych, kojarzony jest z wyrażeniem „o ile mniej" i sugeruje wykonanie odejmowania. Być może, w szkolnym nauczaniu zbyt mały nacisk położony jest na multiplikatywne podejście do nauki o procentach.

9.4.4. Wnioski

Powyższe analizy pozwalają postawić następujące hipotezy:

1. Zarówno uczniowie liceum, jak technikum mają dobrze opanowane umiejętności wyniesione z gimnazjum. Wpływ wiedzy wyniesionej z gimnazjum na wynik matury jest znacznie większy w przypadku uczniów techników niż liceum.
2. Uczniowie osiągają bardzo dobre wyniki w zadaniach typowych, w których można zastosować gotowe reguły postępowania.
3. Uczniowie rozpoczynający naukę w technikum posiadają duży potencjał intelektualny, który nie jest dostrzegany i właściwie wykorzystany. Uczniowie ci na ogół nie rozwijają optymalnie swoich umiejętności i zdolności matematycznych.
4. Grupa uczniów zdających maturę na poziomie rozszerzonym już na wcześniejszych egzaminach zewnętrznych (sprawdzian po szóstej klasie i egzamin gimnazjalny) osiągała wyraźnie lepsze rezultaty z zadań matematycznych niż pozostali maturzyści.

9.5. Wybrane problemy kształcenia matematycznego w klasach I–III

9.5.1. Wprowadzenie

W roku 2005 Centralna Komisja Egzaminacyjna uruchomiła projekt, współfinansowany przez Europejski Fundusz Społeczny, pod tytułem: *Badanie podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej*. Jego celem było zebranie informacji na temat poziomu podstawowych umiejętności szkolnych uczniów kończących I etap kształcenia, a także czynników wpływających na te umiejętności[17].

W roku 2007 uruchomiono kontynuację projektu – jej zasadniczym zadaniem jest stworzenie narzędzia polityki edukacyjnej, pozwalającego na systematyczne i ciągłe doskonalenie jakości funkcjonowania szkoły na pierwszym etapie kształcenia oraz wspierającego podnoszenie jakości kształcenia i efektywności całej szkoły podstawowej. Zadanie to jest realizowane m.in. poprzez prowadzenie systematycznych badań wybranych umiejętności uczniów oraz analizę kontekstów wpływających na te umiejętności. Wyniki kolejnych realizowanych badań są sukcesywnie publikowane w raportach[18] i kierowanych do nauczycieli publikacjach o charakterze metodycznym[19]. Wszystkie te pozycje są zamieszczone na stronie projektu: www.trzecioklasista.cke-efs.pl

Badania umiejętności trzecioklasistów były również prowadzone w ramach projektu *Strategia nauczania matematyki w Polsce*[20] pod kierunkiem Agnieszki Demby[21]. Niektóre z wyników tych badań, w oparciu o *Sprawozdanie z projektu badawczego Strategia nauczania matematyki* oraz publikację *Strategia nauczania matematyki w Polsce* (2011) prezentujemy w niniejszym raporcie w rozdziale 5.3.3.3.

W dalszej części tego rozdziału szeroko omówimy wyniki badań projektów prowadzonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i prowadzonych pod kierunkiem Mirosława Dąbrowskiego.

9.5.2. Wybrane umiejętności matematyczne polskich trzecioklasistów

Wykonywanie obliczeń

Wyniki badań z lat 2006, 2008 oraz 2009 pokazują, że umiejętność stosowania algorytmów działań pisemnych jest jedną z najintensywniej rozwijanych w procesie kształcenia w klasach I–III matematycznych umiejętności[22]. Poniżej prezentujemy przykładowe obliczenia wykonywane przez uczniów podczas badań wraz z poziomem ich poprawnego wykonania (s.e. od 0,7 do 1,7).

92,9 proc.	**82,0 proc.**	**75,0 proc.**	**64,1 proc.**
335 + 468	6875 + 3167	655 − 478	2346 − 468
88,1 proc.	**58,0 proc.**	**67,7 proc.**	**48,3 proc.**
227 · 3	839 · 8	336 : 6	3318 : 7

[17] Dąbrowski M., Żytko M. (red.) (2007), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. I: Raport z badań ilościowych*, CKE: Warszawa. Dąbrowski M., Żytko M. (red.) (2008), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. II: Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów*, CKE: Warszawa.

[18] Dagiel M., Żytko M. (red.) (2009), *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* CKE: Warszawa. Dąbrowski M. (red.) (2009a), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*, CKE: Warszawa. Dąbrowski M. (red.) (2009b), *Trzecioklasista pół roku później. Raport z badań dystansowych w klasie czwartej 2008/2009*, www.trzecioklasista.cke-efs.pl. Kalinowska A. Murawska B. (red.) (2009), *Diagnoza umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych województwa kujawsko-pomorskiego*, Bydgoszcz.

[19] Dąbrowski M. (2008), *Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*, wyd. II zmienione, CKE: Warszawa. Kalinowska A. (2010), *Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty w kształceniu myślenia matematycznego*, CKE: Warszawa. Żytko M. (2010), *Pozwólmy dzieciom mówić i pisać – o umiejętnościach językowych trzecioklasistów*, CKE: Warszawa.

[20] Projekt badawczy *Strategia nauczania matematyki* (kierownik projektu: Z. Marciniak). Wyniki badań prowadzonych w ramach tego projektu zostały zaprezentowane na konferencji *Strategia nauczania matematyki,* 28–29 kwietnia 2010 roku Warszawa.

[21] Demby A. (2011), *Badanie wiedzy matematycznej uczniów po klasie III szkoły podstawowej,* [w:] *Strategia nauczania matematyki w Polsce. Wdrożenie nowej podstawy programowej,* Warszawa, Instytut Problemów Współczesnej Cywilizacji im. Marka Dietricha, s. 149–173.

[22] W sierpniu 2007 roku w wyniku nowelizacji podstawy programowej kształcenia ogólnego algorytmy dodawania i odejmowania pisemnego oraz mnożenia przez liczbę jednocyfrową zostały usunięte z zakresu treści dla I etapu kształcenia i przeniesione na poziom klas 4–6.

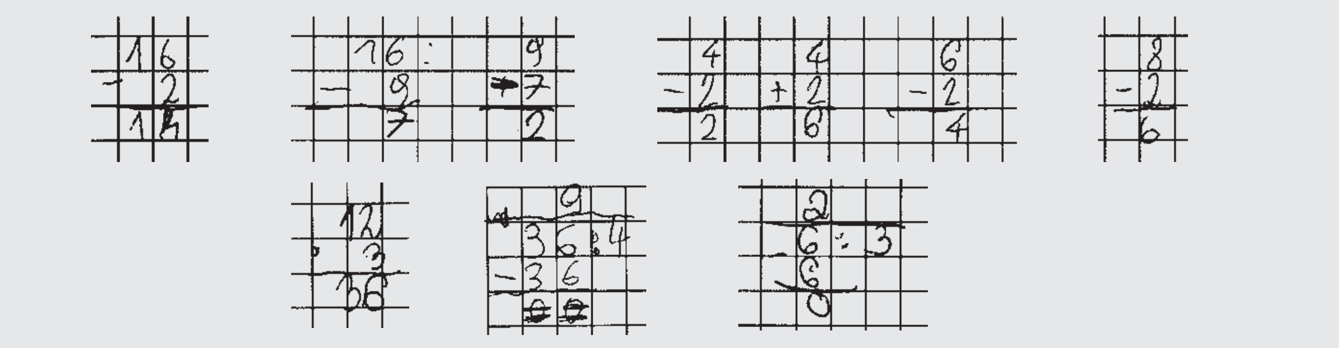
Zwraca uwagę bardzo wysoki poziom „wykonania" dodawania – jak widać, nawet cztery „przekroczenia" obok siebie nie sprawiają trzecioklasistom żadnej trudności. Dla pozostałych algorytmów daje się zauważyć dość regularną zmianę poziomu wyników w miarę wzrostu złożoności przykładu, a liczba poprawnie wykonanych obliczeń waha się od prawie 90% dla najprostszych przykładów do około 50% dla już zdecydowanie bardziej skomplikowanych. Poziom opanowania algorytmów działań pisemnych jest zbliżony niezależnie od lokalizacji szkoły.

Badania pokazują, że uczniowie sporadycznie decydują się przy dodawaniu i odejmowaniu kilkucyfrowych liczb na inne metody wykonywania obliczeń niż algorytmy działań pisemnych – i to nawet w sytuacjach, w których wynik działania wydaje się oczywisty:

Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.
999 + 86   1007 – 999

Dodawanie 999 + 86 wykonało pisemnie aż 84,6% (s.e.=0,9) uczniów – zdecydowana większość, zgodnie z oczekiwaniami, poprawnie. Nieco mniej, bo 82,0% (s.e.=1,0) dzieci zastosowało pisemne odejmowanie w przypadku działania 1007 – 999, ale aż 31,4% uczniów zrobiło przy tej okazji błąd. Wybór metody sprawił, że banalne działanie, które daje się wykonać na palcach, zostało zamienione na skomplikowaną procedurę obliczeniową, w której trzykrotnie trzeba dokonać „rozmieniania". Identyczna tendencja pojawia się także dla obliczeń wykonywanych na mniejszych liczbach, np. 199 + 87 czy 106 – 99. Warto mieć świadomość, że poziom kilkunastu procent, to, przy typowej liczebności klasy, od dwóch do czterech uczniów.

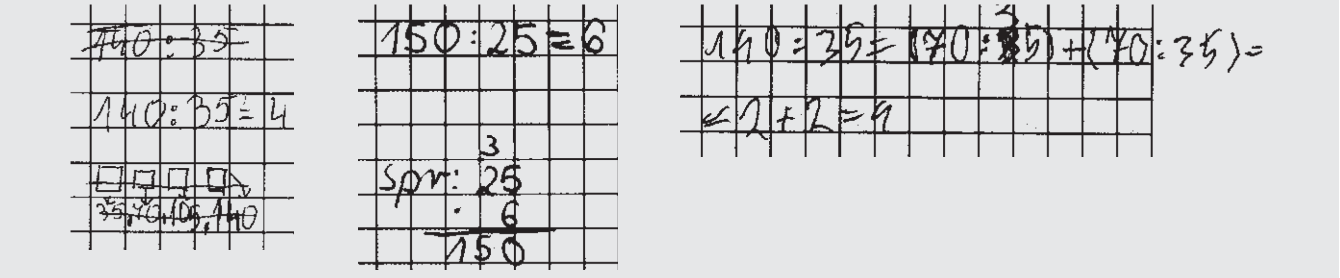
Nacisk kładziony na algorytmy działań pisemnych znajduje swoje odbicie np. podczas rozwiązywania zadań tekstowych – dzieci często sięgają po te narzędzia w zaskakujących sytuacjach.



Nie jest to zresztą jedyna konsekwencja promowania w procesie kształcenia tylko jednej „właściwej" metody.

Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.
150 : 25   140 : 35

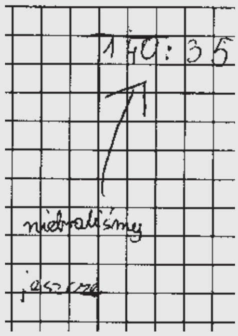
Przykłady te miały odpowiedzieć na pytanie, jakie strategie dzielenia potrafią zastosować uczniowie, gdy nie mogą sięgnąć po dzielenie pisemne[23] – algorytm dzielenia pisemnego przez liczby wielocyfrowe zawsze był domeną klasy 4. Pierwsze z obliczeń wykonało poprawnie 48,4% (s.e.=1,5) uczniów, drugie – 44,2% (s.e.=1,6). Ten poziom wyników powtarza się we wszystkich dotychczas zrealizowanych badaniach, należy więc uznać, że co roku ponad połowa uczniów kończących klasę trzecią nie potrafi w takiej sytuacji wykorzystać skutecznie swojej wiedzy o dzieleniu, a wystarczyło przecież sięgnąć po dodawanie, mnożenie, czy rozdzielność (ostatnia z tych trzech metod pojawiała się najrzadziej).



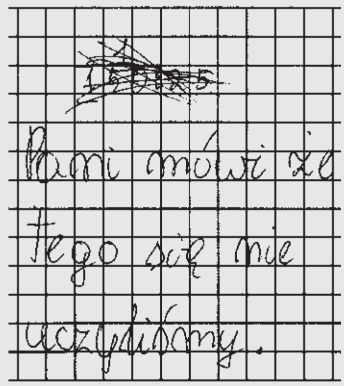
23 Każdy uczeń wykonywał tylko jedno tego typu obliczenie.

Także i w tym przypadku uczniowie bardzo często sięgali po dzielenie pisemne, co na ogół nie prowadziło do końcowego sukcesu.

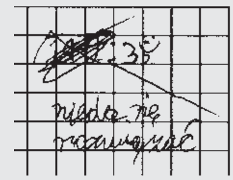
140 : 35



150 : 25



140 : 35



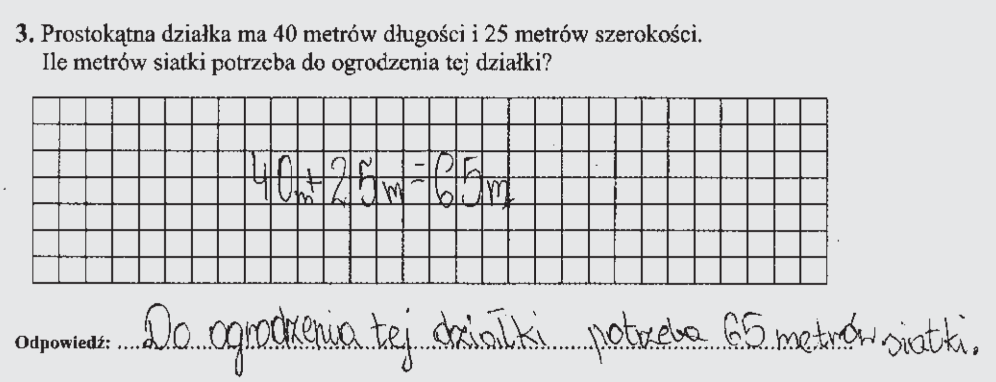
Zdecydowana dominacja jednej metody, w tym przypadku algorytmów działań pisemnych, owocuje matematyczną bezradnością i niskim poziomem zaradności arytmetycznej uczniów, którzy, w sytuacji, w której „utrwalone” narzędzie nie daje oczekiwanego rezultatu, nie sięgają po inne, bo albo nie potrafią tego zrobić, albo tych innych narzędzi nie posiadają.

Obliczanie obwodu prostokąta

Umiejętność obliczania obwodu prostokąta badana była m.in. za pomocą takich dwóch zadań:

> Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości.
> Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?
>
> Oblicz obwód prostokąta o bokach 4 cm i 7 cm.

Każde z nich jest na swój sposób typowe. Pierwsze, sformułowane w języku potocznym, to jedno z najbardziej typowych realistycznych zadań budujących rozumienie pojęcia obwodu i służących jego wprowadzeniu. Drugie, operujące już matematycznymi pojęciami, to sztampowe zadanie ćwiczące algorytm obliczania obwodu prostokąta. Pierwsze zadanie rozwiązało poprawnie 55,9% (s.e.=1,6) trzecioklasistów, drugie: 78,1% (s.e.=1,3), czyli o 22,2% więcej. Z zestawienia tych wyników można wysnuć wniosek, że przy okazji obwodu prostokąta dużo większą wagę przykłada się w procesie kształcenia do wyćwiczenia procedury obliczeniowej niż kształtowania właściwych intuicji i rozumienia samego pojęcia.
Aż 35,1% uczniów, rozwiązując zadanie o działce, zrobiło ten sam, na pierwszy rzut oka zaskakujący, błąd:


3. Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości.
Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?

40m + 25m = 65m

Odpowiedź: Do ogrodzenia tej działki potrzeba 65 metrów siatki.

Można by wysnuć wniosek, że po obliczeniu sumy długości boków, zapomnieli oni pomnożyć wynik przez 2, czyli zwyczajny błąd nieuwagi. Badania pokazują jednak, że znacznie bardziej prawdopodobne jest inne wyjaśnienie – rozwiązując to zadanie tekstowe uczniowie zastosowali typową strategię: *wybierz liczby podane w zadaniu i dopasuj do nich odpowiednie obliczenie.*

Umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych jest jedną z najważniejszych umiejętności rozwijanych w całym procesie matematycznego kształcenia ucznia w szkole podstawowej, w tym także na I etapie.

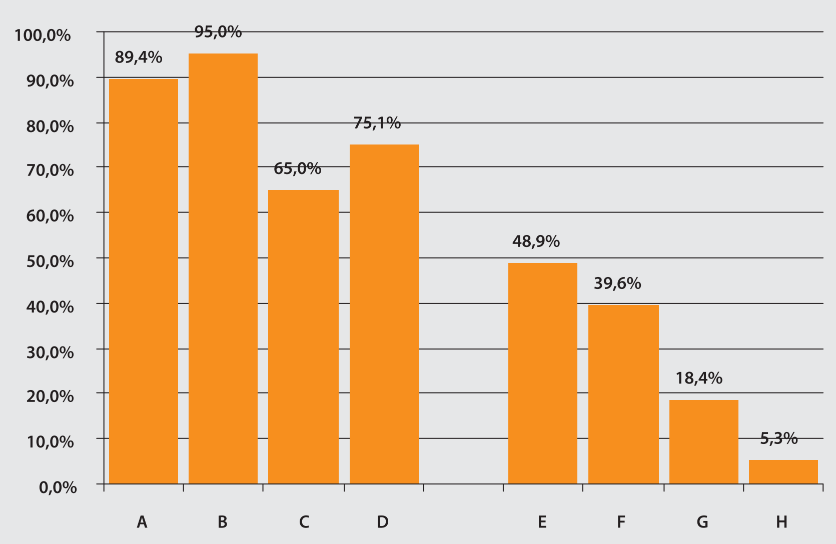
Rozwiązywanie zadań tekstowych

Umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych jest jedną z najważniejszych umiejętności rozwijanych w całym procesie matematycznego kształcenia ucznia w szkole podstawowej, w tym także na I etapie. Inne, pojawiające się przez ten czas na lekcjach matematyki umiejętności, np. wykonywanie obliczeń, mają charakter usługowy właśnie w stosunku do rozwiązywania zadań tekstowych – są one narzędziami, które umożliwiają skuteczne radzenie sobie z zadaniami czy problemami, także stawianymi przez codzienne życie. W badaniach wykorzystano bardzo wiele różnorodnych zadań tekstowych. Omówimy jedynie cztery zadania (**A**–**D**) dotyczące porównywania różnicowego i ilorazowego, bardzo typowe dla codzienności polskiego nauczania początkowego oraz cztery zadania tekstowe (**E**–**H**) o innej, rzadziej spotykanej w polskiej szkole, strukturze, ale wymagające w procesie rozwiązania równie prostych narzędzi co poprzednie.

A	Ewa i Piotrek zbierali w parku kasztany. Ewa zebrała ich 30, a Piotrek o 6 mniej. Ile kasztanów zebrał Piotrek?
B	Bartek i Jurek zbierali w parku kasztany. Bartek zebrał ich 15, a Jurek 3 razy więcej. Ile kasztanów zebrał Jurek?
C	W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?
D	Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janek ma już 24 modele. Piotr ma o 8 więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał?
E	Adam narysował szlaczek złożony z kółek, kwadratów i trójkątów. Kółek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kółek. Ile kwadratów narysował Adam?
F	Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?
G	Jacek i Wojtek mieli po tyle samo lizaków. Wojtek oddał Jackowi dwa swoje lizaki. Teraz więc Jacek ma więcej lizaków niż Wojtek. O ile więcej?
H	Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

Podczas sprawdzania zadań tekstowych przyjęto zasadę, że o uznaniu rozwiązania za poprawne decyduje tok rozumowania ucznia, a nie otrzymanie końcowego poprawnego wyniku – zatem błędy rachunkowe czy notacyjne w procesie oceny rozwiązania pomijano. Poziom poprawnych rozwiązań tych zadań zamieszczono na wykresie 9.16. (s.e. odpowiednio: 0,9; 0,7; 1,6; 1,4; 1,6; 1,5; 1,2; 0,8).

Wykres 9.16. Zadania tekstowe – procent poprawnych rozwiązań

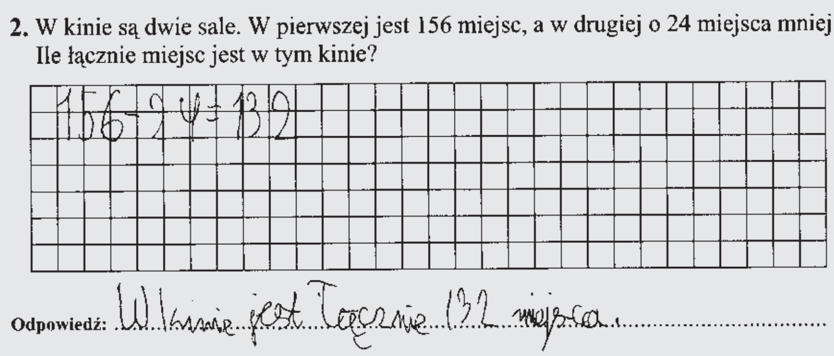


Źródło: opracowanie własne.

Cztery pierwsze kategorie zadań często i systematycznie pojawiają się na I etapie kształcenia, niezależnie od zmian zachodzących w podstawie programowej. Jak widać, uczniowie z ich rozwiązywaniem nie mają większych trudności. Wynik 75,1% dla zadania **D** robi wrażenie. Ten pozytywny obraz zaburzają jednak wyniki pozostałych zadań, które wahają się od 48,9% do 5,3% poprawnych rozwiązań. 5,3% uczniów dla typowej klasy, to … jeden uczeń.

Wiele informacji o przyczynach tej dysproporcji może dać analiza uczniowskich rozwiązań, zwłaszcza tych błędnych.

W zadaniach **A**, **B** i **D** pojawiające się błędy wynikały najczęściej z pomylenia typu porównywania. Ich nasilenie było, jak widać z wyników, niewielkie. W zadaniu **C** aż 26,2 proc. uczniów ograniczyło się do odjęcia podanych liczb.

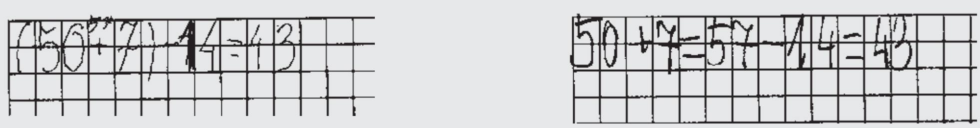


2. W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

156 - 24 = 132

Odpowiedź: W kinie jest łącznie 132 miejsca.

Zadanie **E** to zadanie z nadmiarem danych – po usunięciu informacji o trójkątach staje się ono identyczne w swej strukturze z zadaniem **A**. Dodanie tej jednej informacji obniżyło poziom jego wykonania (w stosunku do **A**) aż o 40,5%. W zadaniu tym najczęściej powtarzającym się błędem było wykorzystanie w obliczeniu wszystkich podanych liczb:

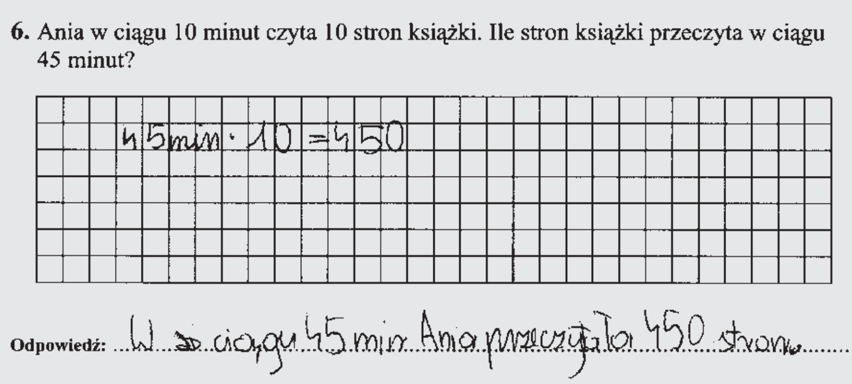


(50 + 7) - 14 = 43

50 + 7 = 57 - 14 = 43

Postąpiło w ten sposób 26,9% trzecioklasistów – znowu mniej więcej co czwarty uczeń.

W zadaniu **F** najbardziej naturalną dla uczniów błędną reakcją było pomnożenie liczb 10 i 45, nieco rzadziej je dodawano albo mnożono trzy liczby podane w zadaniu:

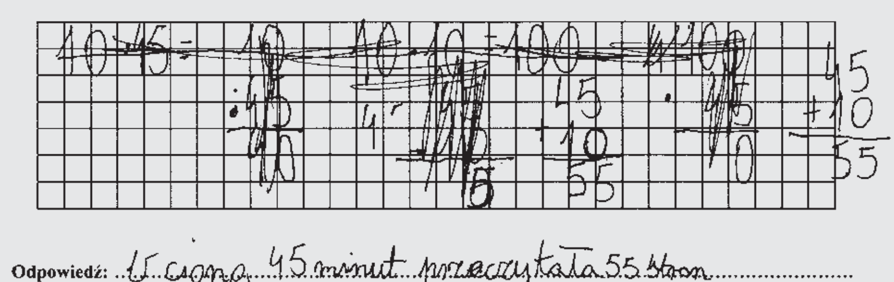


6. Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

45min · 10 = 450

Odpowiedź: W ciągu 45 min Ania przeczytała 450 stron

21,4% uczniów



45 + 10 = 55

Odpowiedź: W ciągu 45 minut przeczytała 55 stron

12,2% uczniów

45 · 10 = 450
450 · 10 = 4500

Odpowiedź: W ciągu 45 minut dnia przeczyta 4500 stron.

12,0% uczniów

Znaczna część uczniów, rozwiązujących zadanie **G** od początku była przekonana, że Jacek ma o 2 lizaki więcej i nie podjęła jakiejkolwiek próby krytycznego zweryfikowania tego przypuszczenia. Niektórzy od razu podawali odpowiedź, inni ilustrowali je jakimiś nic nie wyjaśniającymi obliczeniami.

6. Jacek i Wojtek mieli po tyle samo lizaków. Wojtek oddał ~~Jackowi~~ dwa swoje lizaki. Teraz więc Jacek ma więcej lizaków niż Wojtek. O ile więcej?

Doszedłem do tego dzięki podkreślonemu zadaniu

Odpowiedź: Jacek ma o 2 lizaki więcej

20,1% uczniów

10 - 2 = 8

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\ 8 \\ \hline 2 \end{array}$$

Odpowiedź: O dwa 2 więcej

17,1% uczniów

Uczniowie dochodzili do tego błędnego wniosku nawet po wykonaniu bardzo racjonalnych obliczeń:

Jacek Wojtek
8 + 2 = 10 8 − 2 = 6

Odpowiedź: Jacek ma o dwa lizaki więcej

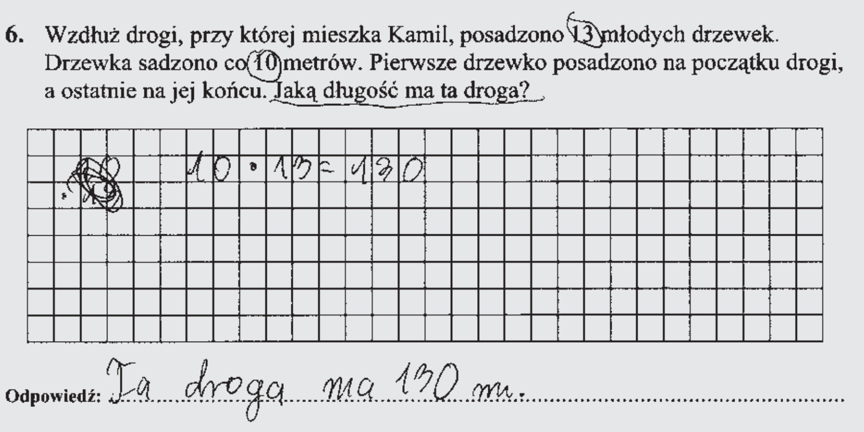
10,1% uczniów

Tylko bardzo nielicznym trzecioklasistom przeszkadzała forma tego zadania:

Nie można tego obliczyć bo nie ma ~~dosyć~~ w treści zadania ile mieli, tylko pisze że po tyle samo

0,5% uczniów

W zadaniu **H** uczniowie masowo mnożyli liczby podane w tekście – ich „wygląd" rzeczywiście do tego zachęca:



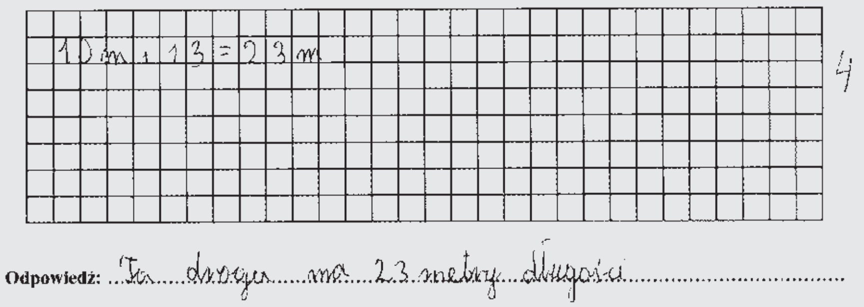
6. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

10 · 13 = 130

Odpowiedź: Ta droga ma 130 m.

63,4% uczniów

Rzadziej liczby te dodawali albo odejmowali:

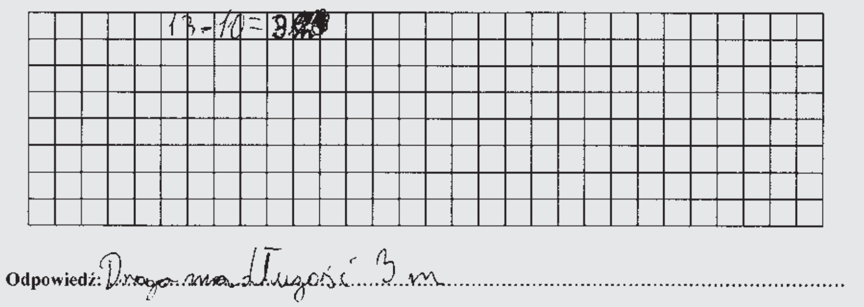


10 m + 13 = 23 m

4

Odpowiedź: Ta droga ma 23 metry długości

16,1% uczniów



13 - 10 = 3

Odpowiedź: Droga ma długość 3 m

Analiza rozwiązań tych zadań tekstowych, a także innych tu nie przytaczanych, rysuje bardzo niepokojący obraz szkolnej matematyki na I etapie kształcenia. Nasi trzecioklasiści osiągają „mistrzostwo" w rozwiązywaniu typowych zadań, pasujących do poznanych i utrwalonych schematów. Natomiast, gdy zadanie jest „nietypowe" i uczniowie nie zostali „wytrenowani" w jego rozwiązywaniu, do głosu dochodzą różnorodne strategie „obronne", mające niewiele wspólnego ze sztuką rozwiązywania zadań tekstowych.

Często słyszy się opinie, że trudności uczniów w rozwiązywaniu zadań tekstowych są efektem tego, że nie potrafią oni czytać treści zadania ze zrozumieniem. Na bazie prezentowanych badań nasuwa się inny wniosek: znaczna część trzecioklasistów w ogóle nie czyta treści zadania, lecz skupia się na podanych w nim liczbach i do liczb tych dobiera odpowiednie działanie.

9.5.3. Zajęcia z edukacji matematycznej na co dzień

Jednym z elementów realizowanych badań były obserwacje lekcji w 20 szkołach z miast liczących ponad 100 000 mieszkańców[24]. Dziesięć z tych szkół w badaniach umiejętności trzecioklasistów uzyskało wyniki lepsze od średniej dla szkół z dużych miast, a dziesięć – gorsze, co pozwoliło na podzielenie 20 szkół na „górną" połówkę i „dolną" połówkę, w celu porównania praktyki edukacyjnej w obu tych grupach szkół.
Podczas badań przeszkoleni obserwatorzy uczestniczyli łącznie w 32 zajęciach poświęconych rozwijaniu umiejętności matematycznych uczniów o sumarycznej długości 1468 minut. Tabela 9.11. zawiera zestawienie typowych i nietypowych, jak się okazuje, aktywności dzieci podczas obserwowanych zajęć, zarówno globalnie, jak i z podziałem na obie połówki szkół.

Tabela 9.11.
Procent obserwowanych zajęć z edukacji matematycznej, na których wystąpiły wymienione typy aktywności uczniów

Podczas obserwowanych zajęć dzieci:	Szkoły razem	Górna połówka szkół	Dolna połówka szkół
ćwiczyły wykonywanie obliczeń	100,0	100,0	100,0
słuchały nauczyciela prezentującego gotowe metody postępowania	75,0	62,5	87,5
rozwiązywały zadania tekstowe	65,6	68,8	62,5
dostawały zadania problemowe	15,6	31,3	0,0
czytały mapy, plany, diagramy, tabele	15,6	18,8	12,5
posługiwały się modelami geometrycznymi	6,3	0,0	12,5
grały w gry dydaktyczne	6,3	12,5	0,0
liczba obserwowanych zajęć	32	16	16

Źródło: opracowanie własne.

Rzut oka na tabelę wyjaśnia, dlaczego w świadomości uczniów matematyka to tylko rachunki – sprawność rachunkowa była rozwijana na wszystkich obserwowanych zajęciach. Co więcej, była rozwijana w bardzo tradycyjny i monotonny sposób – gry dydaktyczne pojawiły się jedynie dwukrotnie. Swoboda intelektualna ucznia podczas zajęć z edukacji matematycznej jest zdecydowanie mniejsza niż np. podczas rozwijania ich umiejętności językowych – na ¾ zajęć nauczyciel prezentował gotowe metody postępowania i je utrwalał. W obu grupach szkół takie postępowanie nauczyciela było rzeczą częstą i – w efekcie – normalną, a dla szkół z dolnej połówki można powiedzieć, że było normą – wystąpiło na 87,5% obserwowanych zajęć.
Na około 65% zajęć uczniowie rozwiązywali zadania tekstowe, choć bliższe rzeczywistości jest stwierdzenie, że (mniej lub bardziej biernie) uczestniczyli w ich rozwiązywaniu. Nauczyciele zazwyczaj sprowadzali rozwiązanie zadania do wyboru właściwego działania, najczęściej sami zdradzając, o jakie działanie chodzi i w jaki sposób ma być wykonane.
Zadania o charakterze problemowym odnotowano jedynie w pięciu szkołach na dwadzieścia, łącznie na 15,6% zajęć, i to tylko w szkołach z górnej połówki. Nie oznacza to jednak, że uczniowie mieli okazję do rozwiązywania tych problemów – były one wyzwaniem dla nauczycieli, którzy rozwiązywali je sami albo podawali uczniom kolejne czynności składające się na rozwiązanie. Tylko raz, na jednych z obserwowanych zajęć, uczniowie mieli okazję do twórczości – nauczyciel poprosił ich, aby ułożyli inne pytania, które by można postawić do rozwiązanego zadania tekstowego. W odniesieniu do całości obserwowanych zajęć daje to średnio **3 sekundy matematycznej twórczości podczas lekcji trwającej 45 minut.**
Sporadycznie uczniowie korzystali na zajęciach z edukacji matematycznej z map, planów, diagramów czy tabeli – okazja do ich czytania pojawiła się na 5 spośród 32 obserwowanych zajęć. Jeszcze rzadziej, bo jedynie na dwóch zajęciach, dzieci miały okazję do posługiwania się modelami obiektów geometrycznych.

Z przeprowadzonych obserwacji wynika, że edukacja matematyczna w praktyce szkolnej to dyscyplina, w której liczy się i rozwiązuje zadania w sposób pokazany przez nauczyciela oraz ćwiczy podane przez niego metody reagowania w typowych sytuacjach.

[24] Dagiel M., Żytko M. (red.) (2009), *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* CKE: Warszawa.

9.5.4. Nauczyciele o edukacji matematycznej

Podczas badania umiejętności trzecioklasistów prowadzone były także badania ankietowe ich nauczycieli. Wśród wykorzystywanych narzędzi znajduje się kwestionariusz zawierający kilkadziesiąt stwierdzeń dotyczących edukacji językowej i edukacji matematycznej dzieci. Zadaniem nauczycieli jest ustosunkowanie się do tych stwierdzeń na czterostopniowej skali: od *zdecydowanie zgadzam się*, do *zdecydowanie nie zgadzam się*. Dokonywane przez nich wybory rzucają światło na ich edukacyjne przekonania. W tabeli 9.12. przytoczono wyniki dla niektórych z wykorzystywanych stwierdzeń.

Tabela 9.12.
Procentowy rozkład wybranych opinii nauczycieli na temat rozwijania matematycznych umiejętności uczniów.

stwierdzenia	zdecydowanie tak	raczej tak	raczej nie	zdecydowanie nie
Podstawowym zadaniem nauczyciela jest staranne tłumaczenie dzieciom, w jaki sposób mają rozwiązywać zadania różnych typów.	39,9	38,4	18,2	3,5
Jeśli chcemy, aby uczniowie opanowali umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, musimy przerobić z nimi dużą liczbę typowych zadań.	28,7	47,5	21,1	2,7
Zawsze należy pozwalać uczniom na samodzielne wybieranie metody rozwiązywania zadania tekstowego.	30,4	53,4	15,4	0,8
Warto znaleźć czas na to, aby uczniowie prezentowali własne metody rozwiązania tego samego zadania.	72,5	27,1	0,0	0,4
Należy dążyć do tego, aby jak najwięcej dzieci tworzyło własne sprytne metody wykonywania obliczeń.	42,5	43,2	12,8	1,5
Uczniowie najlepiej uczą się liczyć, utrwalając z pomocą typowych słupków metody pokazane przez nauczyciela.	10,3	34,1	48,7	6,9
Najlepiej i najbezpieczniej, gdy dzieci liczą w sposób pokazany przez nauczyciela.	4,2	32,4	46,2	17,2
Biegłe stosowanie algorytmów działań pisemnych, to jedna z najbardziej życiowo przydatnych umiejętności matematycznych.	43,0	39,8	13,7	3,5
Najważniejszym celem edukacji matematycznej w klasach 1–3 jest zapoznanie uczniów z symboliką matematyczną.	16,0	37,4	37,4	9,2
Uczniowie klas 1–3 mają już na tyle rozwiniętą wyobraźnię przestrzenną, że mogą zajmować się bryłami.	1,9	18,1	59,2	20,8
Grafy i drzewka pomagają uczniom w lepszym rozumieniu matematyki.	49,0	44,8	5,0	1,2
Ucząc się matematyki, dziecko powinno przede wszystkim uważnie słuchać nauczyciela i powtarzać jego czynności.	14,6	42,3	32,3	10,8

Źródło: opracowanie własne.

Okazuje się, że dla 78,3% badanych podstawowym zadaniem nauczyciela jest staranne tłumaczenie dzieciom, jak mają rozwiązywać zadania, a zdaniem 76,2% – uczenie rozwiązywania zadań tekstowych polega przede wszystkim na przerabianiu dużej liczby typowych zadań. Ale równocześnie nauczyciele są prawie jednomyślni, jeśli chodzi o akceptację aktywności uczniów podczas rozwiązywania zadań tekstowych – doceniają dydaktyczną wartość bogactwa stosowanych przez dzieci metod i różnorodności rozwiązań.

Podobne zjawisko daje się zauważyć w przypadku opinii dotyczących rozwijania sprawności rachunkowej dzieci – z jednej strony deklarowane poparcie dla tworzenia warunków do budowania przez dzieci własnych strategii liczenia (85,7%), z drugiej zaufanie do „słupków" (44,4%) i skuteczności metod pokazanych przez nauczyciela (36,8%).

Uderza także niezmienna popularność algorytmów działań pisemnych – aż 82,8% badanych uważa umiejętność ich stosowania za jedną z najbardziej życiowo przydatnych umiejętności matematycznych.

Aż 80,0% nauczycieli uważa, że ich uczniowie nie dorośli jeszcze do zajmowania się bryłami, a przecież od urodzenia obcują z nimi w otaczającej nas rzeczywistości. Być może tylko te pozostałe 20,0% uświadomiło sobie, że klocki, pudełka, bloki itp. to modele właśnie brył. Ponad połowa badanych (53,7%) jest przekonana, że najważniejszym celem edukacji matematycznej w klasach I–III jest zapoznanie dzieci z symbolami matematycznymi, a jeszcze więcej, bo aż 93,8%, wierzy w to, że grafy i drzewka, które mają silnie symboliczny charakter, pomagają uczniom w rozumieniu matematyki.

To nauczyciel przekazuje wiedzę matematyczną uczniom, którzy, żeby odnieść sukces, powinni go uważnie słuchać i powtarzać jego czynności – tak o swojej pracy myśli większość (56,9%) nauczycieli I etapu kształcenia i, jak widać z obserwacji zajęć oraz wyników badań umiejętności trzecioklasistów, przekonanie to w bardzo silny sposób determinuje ich zawodowe poczynania.

Powyższe obserwacje i stwierdzenia wzbogacają i uzupełniają wyniki badań realizowanych w ramach projektu *Strategia nauczania matematyki w Polsce*. Zofia Muzyczka i Krystyna Sawicka podają[25], że na zajęciach z edukacji matematycznej w klasach I–III szkoły podstawowej (wbrew deklaracjom nauczycieli o zdobywaniu przez uczniów wiedzy i umiejętności w działaniach praktycznych) zdecydowanie dominuje praca z zeszytami ćwiczeń do wypełniania. Autorki badań zauważają, że pomimo możliwości doprowadzenia do zakończenia wykonywanego przez uczniów zadania bez przerywania pracy z końcem lekcji, w wielu szkołach w dalszym ciągu prowadzone są zajęcia w układzie: 45 minut lekcja, potem przerwa, i kolejna 45 minutowa lekcja. W sprawozdaniu prezentują również opinie nauczycieli o efektywności kształcenia zintegrowanego. Niektórzy nauczyciele podkreślają, że realizacja kilku celów edukacyjnych w tym samym czasie prowadzi do nieskutecznego nauczania. Twierdzą, że edukacji matematycznej nie da się integrować treściowo z innymi edukacjami i dlatego starają się organizować ją w formie odrębnych zajęć.

9.5.5. Przede wszystkim wiara w ucznia!

Jedną z najbardziej rzucających się w oczy cech polskiego nauczania początkowego, zwłaszcza w zakresie edukacji matematycznej, jest brak wiary w możliwości ucznia. W efekcie, to nauczyciel wykonuje za ucznia, z najlepszymi zresztą intencjami, cały wysiłek intelektualny po to, aby przekazać mu kolejną „pigułkę wiedzy" do zapamiętania.

Trudno zresztą oczekiwać od nauczycieli nauczania początkowego innego podejścia do procesu matematycznego kształcenia dzieci. To, które tak skutecznie stosują na co dzień, wynika wprost z istniejącej w naszym kraju tradycji edukacyjnej, która głosi, że dziecko wie tylko to, czego dowie się od nauczyciela. Jedną z najbardziej rzucających się w oczy cech polskiego nauczania początkowego, zwłaszcza w zakresie edukacji matematycznej, jest brak wiary w możliwości ucznia. W efekcie, to nauczyciel wykonuje za ucznia, z najlepszymi zresztą intencjami, cały wysiłek intelektualny po to, aby przekazać mu kolejną „pigułkę wiedzy" do zapamiętania. Takie podejście jest w pełni zgodne nie tylko z oczekiwaniami rodziców uczniów, którzy na ogół znają tylko tak właśnie działającą szkołę, czy dyrektorów szkół i kolegów uczących w klasach starszych[26], ale także jest wzmacniane przez wykorzystywane w szkołach pakiety edukacyjne czy system kształcenia i doskonalenia nauczycieli. Trudno się nie zgodzić z Dorotą Klus-Stańską[27], gdy twierdzi w licznych swoich publikacjach, że nie tylko uczeń, ale także nauczyciel jest ofiarą szkoły takiej, jaka ona jest.
Wydaje się, że dla znacznej części nauczycieli I etapu kształcenia edukacja matematyczna to ta „gorsza" edukacja, w której poruszają się raczej niepewnie, być może nie rozumiejąc jej i na ogół nie lubiąc. W efekcie, na zajęciach jej poświęconych są zdecydowanie bardziej dominujący i apodyktyczni niż ucząc te same dzieci języka.

Nasuwa się wniosek, że to obszar matematycznych przekonań i kompetencji nauczycieli klas I–III powinien być w centrum zainteresowania każdej reformy polskiej szkoły, której celem jest rzeczywista poprawa jakości jej pracy.

9.6. Kompetencje matematyczne i dydaktyczne studentów – przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki

9.6.1. Umiejętności przyszłych nauczycieli w kontekście międzynarodowych badań TEDS-M

W ciągu ostatnich trzydziestu lat doszło w Polsce do znaczących zmian w kwalifikacjach nauczycieli. Pod koniec lat 80. nauczyciele z wykształceniem wyższym stanowili nieco więcej niż 50% kadry pedagogicznej – pozostali byli absolwentami studium nauczycielskiego lub szkół średnich. W 1998 r. wykształcenie wyższe posiadało już 78% ogółu nauczycieli. Badania nauczycieli matematyki w ramach projektu *Badanie Kształcenia i Doskonalenia Zawodowego Nauczycieli – Matematyka 2008*[28] ujawniły, że obecnie

25 *Sprawozdanie z projektu badawczego Strategia nauczania matematyki (niepublikowane).*

26 Dagiel M., Żytko M. (red.), (2009), *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* CKE: Warszawa.

27 Klus-Stańska D. (2005), *Mentalne zniewolenie nauczycieli wczesnej edukacji – epizod czy prawidłowość* [w:]*Problemy Wczesnej Edukacji* nr 1, 55–66. Klus-Stańska D. (2010), *Nauczycielska tożsamość zawodowa jako konstrukt negocjowany społecznie, czyli o pozorach podmiotowości nauczyciela wczesnej edukacji*, [w:] Waloszek D. (red.) *Edukacja szkolna i wczesnoszkolna. Obszary sporów, poszukiwań, wyzwań i doświadczeń w kontekście zmian oświatowych*, Kraków, Wydawnictwo Centrum Edukacyjne Bliżej Przedszkola, 43–60.

28 *Badanie Kształcenia i Doskonalenia Zawodowego Nauczycieli – Matematyka 2008* (*Teacher Education and Development Survey – Mathematics 2008*, w skrócie TEDS-M 2008) to pierwsze badanie umożliwiające porównanie umiejętności studentów różnych uczelni w Polsce, pozwalające wnioskować o poziomie umiejętności matematycznych studentów przygotowujących się do wykonywania zawodu nauczyciela. Jest to też jedno z pierwszych porównawczych badań osiągnięć edukacyjnych w ramach szkolnictwa wyższego. Badanie objęło studentów III roku studiów I stopnia i V roku studiów jednolitych magisterskich na kierunku pedagogika i matematyka. W badaniu TEDS-M brali również udział studenci studiów II stopnia. Jednakże ze względu na fakt, że posiadają oni kwalifikacje pedagogiczne, nabyte na studiach I stopnia i mają uprawnienia do pracy w zawodzie nauczyciela, ich wyniki zostały wydzielone i poddane odrębnej analizie. W ramach tego projektu przeprowadzono również badanie nauczycieli matematyki. Raport dostępny na stronie www.ifispan.waw.pl w zakładce badania.

ok. 97% legitymuje się wykształceniem wyższym, z czego zdecydowana większość ma wykształcenie wyższe magisterskie. Tylko nieliczni posiadają wykształcenie licencjackie lub inżynierskie. Mniej niż 1% łącznie stanowią osoby, wśród których na jednym biegunie są nauczyciele, którzy zakończyli edukację na poziomie kolegium nauczycielskiego, a na drugim ci, którzy posiadają stopień naukowy doktora, doktora habilitowanego lub tytuł profesorski.
Jednocześnie widoczne jest duże zróżnicowanie ścieżek do zawodu nauczyciela matematyki. Jedynie 62% nauczycieli matematyki ukończyło wyższe studia matematyczne specjalności nauczycielskiej. 27% nabyło uprawnienia do nauczania matematyki na studiach podyplomowych.

Czy wobec znaczącego wzrostu kwalifikacji formalnych nauczycieli matematyki poprawiła się jakość nauczania?

Odpowiedź na to pytanie wymaga pogłębionych badań nad jakością i dostępnością różnych form doskonalenia zawodowego, nad adekwatnością doskonalenia zawodowego do potrzeb rynku pracy, nad jakością wsparcia uzyskiwanego przez nauczycieli od środowisk zajmujących się doradztwem metodycznym, a także nad procesem kształcenia nauczycieli. Ostatni z wymienionych problemów jest ważny zwłaszcza teraz, gdy struktura wieku polskich nauczycieli jest dobra, a zmiany demograficzne powodują, że przynajmniej w krótkim okresie zapotrzebowanie na nowo wykształconych nauczycieli będzie stosunkowo niewielkie. Stwarza to okazję do przemyślenia modelu kształcenia nauczycieli w stronę systemu, który w większym stopniu niż dotychczas jest nastawiony na jakość i efekty kształcenia, a nie ilość osób przygotowywanych do wykonywania zawodu nauczyciela.

Czy uczelnie właściwie przygotowują studentów do pracy w charakterze nauczyciela matematyki? Jakie są mocne i słabe strony polskich przyszłych nauczycieli w porównaniu z przyszłymi nauczycielami z innych państw? Jakie umiejętności matematyczne i pedagogiczne posiadają studenci kończący studia?

Częściową odpowiedź na powyższe pytania dały wyniki *Badania Kształcenia i Doskonalenia Zawodowego Nauczycieli – Matematyka 2008* (TEDS-M, 2008). Polscy studenci zostali zakwalifikowani do czterech grup w zależności od poziomu, na którym będą mogli nauczać. Umiejętności matematyczne i z zakresu dydaktyki matematyki były badane za pomocą testów dwóch poziomów; *test podstawowy* rozwiązywali przyszli nauczyciele szkół podstawowych, *test rozszerzony* – przyszli nauczyciele szkół średnich (w Polsce gimnazjum i szkół ponadgimnazjalnych). W tabeli 9.13. zestawiono średnie wyniki studentów państw uczestniczących w badaniu z uwzględnieniem poziomu, na którym mogą oni nauczać.

Tabela 9.13.
Średnie wyniki studentów z matematyki i dydaktyki matematyki z uwzględnieniem poziomów, na których mogą oni nauczać

Poziom, na którym mogą nauczać przyszli nauczyciele	Umiejętności matematyczne			Umiejętności z zakresu dydaktyki matematyki		
	Państwo	Średnia	Błąd Stand.	Państwo	Średnia	Błąd Stand.
Przyszli nauczyciele kształcenia wczesnoszkolnego (w Polsce: studenci kierunku pedagogika)	Rosja	535	9,89	Szwajcaria	519	5,63
	Szwajcaria	512	6,43	Rosja	512	8,09
	Niemcy	501	2,86	Niemcy	491	4,75
	Polska	456	2,28	**Polska**	452	1,87
	Gruzja	345	3,85	Gruzja	345	4,93
Przyszli nauczyciele szkół podstawowych specjalizujący się w matematyce (w Polsce: studenci kierunku matematyka, którzy pisali *test podstawowy*)	**Polska**	614	4,79	Singapur	604	7,04
	Singapur	600	7,76	**Polska**	575	4,04
	Niemcy	555	7,48	Niemcy	552	6,82
	Tajlandia	528	2,31	Stany Zjednoczone	544	5,89
	Stany Zjednoczone	520	6,57	Tajlandia	506	2,26
	Malezja	488	1,82	Malezja	503	3,09

Przyszli nauczyciele szkół średnich, którzy mogą uczyć najwyżej do X klasy (w Polsce: najwyżej do poziomu gimnazjum, studenci kierunku matematyka I stopnia, którzy pisali test rozszerzony)	Tajwan	667	3,86	Tajwan	649	5,25
	Singapur	544	3,65	Szwajcaria	549	5,88
	Szwajcaria	531	3,75	Singapur	539	6,06
	Polska	529	4,25	**Polska**	520	4,5
	Stany Zjednoczone	468	3,72	Norwegia	480	6,24
	Norwegia	461	4,54	Stany Zjednoczone	471	3,87
	Filipiny	442	4,6	Filipiny	450	4,67
	Botswana	436	7,31	Botswana	436	8,51
	Chile	354	2,53	Chile	394	3,77
Przyszli nauczyciele szkół średnich, którzy mogą uczyć powyżej X klasy (w Polsce: w szkołach ponadgimnazjalnych, studenci kierunku matematyka studiów jednolitych magisterskich, którzy pisali test rozszerzony)	Rosja	594	12,78	Rosja	566	10,15
	Singapur	587	3,84	Singapur	562	6,05
	Stany Zjednoczone	553	5,07	Stany Zjednoczone	542	5,81
	Polska	549	4,4	**Polska**	528	6,17
	Norwegia	503	9,75	Norwegia	495	17,75
	Malezja	493	2,43	Tajlandia	476	2,49
	Tajlandia	479	1,56	Oman	474	3,79
	Oman	472	2,44	Malezja	472	3,32
	Botswana	449	7,52	Gruzja	443	9,63
	Gruzja	424	8,91	Botswana	409	15,64

Wyniki studentów zostały tak skalibrowane, że średnia wszystkich krajów, które spełniły wymogi dotyczące poziomu realizacji badania, wynosiła 500 punktów, zaś 100 punktów odpowiadało wartości odchylenia standardowego. Średnia została obliczona w taki sposób, by dane każdego z krajów były równoważne.
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Badanie TEDS-M ujawniło, że umiejętności matematyczne przyszłych polskich nauczycieli klas I–III w zakresie matematyki i dydaktyki matematyki należą do najniższych spośród wszystkich badanych krajów (456 punktów w teście mierzącym wiedzę umiejętności z zakresu matematyki, 452 punkty – z zakresu dydaktyki matematyki). Zaledwie jednej czwartej polskich studentów udało się uzyskać więcej niż 500 punktów na teście z wiedzy i umiejętności matematycznych. Podobnie jest z umiejętnościami z zakresu dydaktyki matematyki. Nie jest tu usprawiedliwieniem fakt, że kształcenie studentów kierunku pedagogika obejmuje nie tylko edukację matematyczną, ale także polonistyczną, przyrodniczą, plastyczną, muzyczną. W analogicznych programach z innych krajów studenci uzyskują lepsze wyniki. Jak się wydaje, niski poziom umiejętności studentów pedagogiki wynika przede wszystkim z niskich wymagań wobec kandydatów na studia i jest pochodną braków wiedzy matematycznej nabytej przez przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej w szkołach podstawowych i średnich. Należy podkreślić, że studenci biorący udział w badaniu TEDS-M nie zdawali obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki. Jednocześnie system kształcenia nauczycieli nauczania zintegrowanego w Polsce zdaje się opierać na założeniu, że absolwenci szkół średnich posiadają wystarczającą wiedzę matematyczną do kształcenia matematycznego małych dzieci. Założenie to jest fałszywe. Słaba obecność kształcenia matematycznego w standardach dla kierunku pedagogika, planach i programach studiów na specjalnościach edukacja przedszkolna i wczesnoszkolna lub podobnych znajduje odbicie w niskich wynikach osiąganych przez studentów w teście kompetencyjnym mierzącym umiejętności z zakresu matematyki i dydaktyki matematyki. Niski poziom wiedzy matematycznej i brak odpowiednich umiejętności nauczycieli nauczania wczesnoszkolnego mogą w dużej mierze przyczyniać się do obniżenia jakości kształcenia, głównie poprzez ukierunkowanie nauczania na przeciętnego ucznia oraz brak właściwej odpowiedzi na indywidualne potrzeby edukacyjne uczniów.

Niski poziom wiedzy matematycznej i brak odpowiednich umiejętności nauczycieli nauczania wczesnoszkolnego mogą w dużej mierze przyczyniać się do obniżenia jakości kształcenia.

Istnieje uzasadniona obawa, że tak przygotowani przyszli nauczyciele klas I–III nie będą dbać o rozwój uczniów uzdolnionych matematycznie, a nawet wręcz przeciwnie – mogą przyczynić się do powstania blokad uczenia się matematyki uczniów zdolnych, tłumić aktywność poznawczą dzieci zdolnych i spychać ich do przeciętnego poziomu. Na ten problem zwraca uwagę Edyta Gruszczyk-Kolczyńska. Z prowadzonych przez nią badań (projekt badawczy *Wspomaganie rozwoju umysłowego wraz z edukacją matematyczną dzieci w klasie zerowej i w pierwszym roku nauki szkolnej* finansowany ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2006–2009) wynika, że 58% polskich dzieci już w wieku przedszkolnym wykazuje się matematycznym ukierunkowaniem umysłu i z łatwością opanowuje wiadomości i umiejętności matematyczne. W następnych badaniach dotyczących tej kwestii (projekt *Rozpoznawanie i wspomaganie rozwoju uzdolnień do uczenia się matematyki u starszych przedszkolaków i małych uczniów* finansowany

ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2007–2010) wyodrębnia dzieci szczególnie uzdolnione matematycznie, i stwierdza, że takie dzieci są już w grupie czterolatków, a co piąte dziecko pięcioletnie i co czwarte dziecko sześcioletnie manifestuje swoje uzdolnienia matematyczne. Natomiast w grupie siedmiolatków już tylko co ósme dziecko przejawia takie uzdolnienia. Ponadto z przytoczonych badań wynika, iż zdecydowana większość rodziców i nauczycieli nie dostrzega szczególnych predyspozycji umysłowych dzieci uzdolnionych matematycznie. Nieliczni, którzy sądzą inaczej, nie wiedzą jak pielęgnować uzdolnienia matematyczne dzieci. Potwierdza to analiza planów studiów kierunków nauczycielskich: nie ma tam przedmiotów o nazwie sugerującej, że dotyczą dzieci uzdolnionych.

Przytoczone wyniki badań pozostają w sprzeczności z powszechnym przekonaniem, że uzdolnienia matematyczne są rzadkie i uwidaczniają się tylko u niektórych uczniów na wyższych etapach edukacyjnych. Ponadto potwierdzają tendencję, którą Czesław Kupisiewicz nazywa plagą przeciętności – przeciętne szkoły stosują metody i formy organizacyjne nauczania i wychowania nastawione na przeciętnych uczniów, którym stawiają przeciętne na ogół wymagania, a zaniedbują dzieci i młodzież o ponadprzeciętnych możliwościach i uzdolnieniach marnotrawiąc bezcenny „kapitał ludzki" o ogromnym znaczeniu dla przyszłości kraju[29].

Znacznie lepsze wyniki niż studenci pedagogiki osiągają polscy studenci matematyki. Są one jednak bardzo zróżnicowane: wśród polskich studentów matematyki są osoby o najwyższych kompetencjach, ale około jedna czwarta posiada umiejętności poniżej średniej międzynarodowej. Świadczy to o zróżnicowanej jakości kształcenia.

W badaniach TEDS-M 2008 wśród przyszłych nauczycieli matematyki szkół podstawowych (w Polsce studenci kierunku matematyka, którzy przygotowywani są do nauczania w klasach IV–VI) najlepsze wyniki z zakresu matematyki osiągnęli studenci z Polski (614 punktów w teście mierzącym wiedzę umiejętności z zakresu matematyki). Pod względem wiedzy i umiejętności z zakresu dydaktyki matematyki umiejętności polskich studentów okazały się niższe niż umiejętności studentów z Singapuru i niewiele wyższe od studentów niemieckich.

Umiejętności przyszłych nauczycieli przygotowywanych do nauczania najwyżej do X klasy (w Polsce do poziomu gimnazjum) są wprawdzie wyższe niż średnia międzynarodowa (529 punktów w teście mierzącym wiedzę umiejętności z zakresu matematyki, 520 punktów – z zakresu dydaktyki matematyki), ale odstają od umiejętności studentów wiodących krajów. Najlepsze średnie wyniki uzyskali studenci z Tajwanu (odpowiednio 667 i 649 punktów). Należy jednak zauważyć, że w tym kraju zawód nauczyciela ma wysoki prestiż. Na studia nauczycielskie przyjmowani są studenci z wysokimi wynikami w nauce, którzy już rozpoczęli studia kierunkowe. Do nauczania w szkole średniej wymagane jest wykształcenie kierunkowe z matematyki lub nauk ścisłych. Kwalifikacje nauczycielskie uzyskuje się po zdaniu państwowego egzaminu, który w ostatnich latach pozytywnie zaliczyło jedynie 68–76% przystępujących do niego osób.

W grupie nauczycieli przygotowywanych do nauczania powyżej X klasy (w Polsce w szkołach ponadgimnazjalnych) zarówno pod względem wiedzy i umiejętności matematycznych, jak i umiejętności dydaktycznych najlepsze wyniki uzyskali studenci z Rosji i Singapuru. Wyniki polskich studentów (549 punktów w teście mierzącym wiedzę umiejętności z zakresu matematyki, 528 punktów – z zakresu dydaktyki matematyki) były zbliżone do wyników studentów amerykańskich, którzy są przygotowywani do nauczania matematyki wyłącznie w szkołach średnich.

9.6.2. Kompetencje matematyczne polskich przyszłych nauczycieli

Mocną stroną polskich studentów jest znajomość wielu podstawowych terminów, faktów i procedur z zakresu algebry, geometrii, nauki o liczbie, rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, umiejętność rozwiązywania zadań algorytmicznych, stosowania wiedzy w typowych sytuacjach, prowadzenia prostych rozumowań.

Problemem polskich studentów jest zbyt powierzchowna znajomość treści matematycznych, ich pamięciowe opanowanie bez zrozumienia, a także braki w zakresie umiejętności: rozwiązywania zadań nieschematycznych, niealgorytmicznych, wypracowania własnej, subiektywnie nowej strategii rozwiązania zadania, podejmowania samodzielnych decyzji i ich uzasadniania, modelowania sytuacji pozamatematycznych, doboru odpowiedniego modelu matematycznego do sytuacji, definiowania pojęć matematycznych, przeprowadzania bardziej skomplikowanych rozumowań matematycznych, łączenia ze sobą różnych elementów wiedzy i wyciągania wniosków, oceny prawdziwości hipotez.

---

29 Kupisiewicz Cz. (2009), *Zmiana (change) i wzmacnianie (strengthening) – słowa klucze współczesnych reform szkolnych*, [w:] *Edukacja narodowym priorytetem. Księga jubileuszowa w 85. rocznicę urodzin Profesora Czesława Kupisiewicza*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Humanitas, Sosnowiec.

9.6. Kompetencje matematyczne i dydaktyczne studentów – przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki

Zadania z obszaru matematyki zostały sklasyfikowane ze względu na dział matematyki szkolnej (algebra, geometria, nauka o liczbie, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka) oraz kompetencje matematyczne (znajomość treści matematycznych, stosowanie matematyki, rozumowanie).

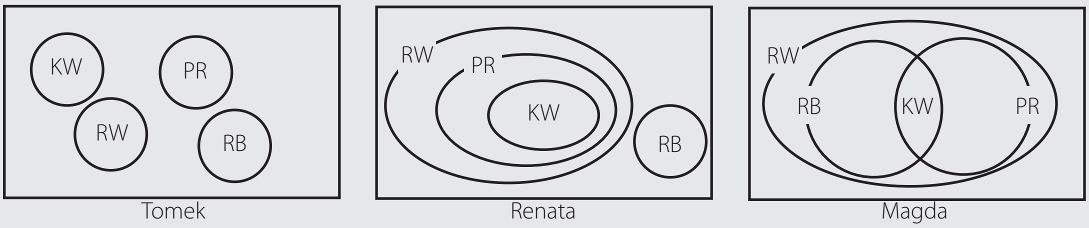
Badanie ujawniło, że polscy przyszli nauczyciele szkół podstawowych dobrze znają podstawowe fakty z zakresu algebry, arytmetyki, teorii liczb, planimetrii, stereometrii, rachunku prawdopodobieństwa i statystyki. Radzą sobie z odtwarzaniem prostych pojedynczych definicji, twierdzeń, czy algorytmów. Znają niektóre własności działań w zbiorze liczb całkowitych. Wiedzą, że np. w zbiorze liczb całkowitych odejmowanie nie jest przemienne – poprawną odpowiedź podało 96% (s.e.=1,56) studentów kierunku matematyka i 83% (s.e.=1,82) kierunku pedagogika, dzielenie nie jest przemienne – poprawną odpowiedź podało odpowiednio 96% (s.e.=1,48) i 86% (s.e.=1,50), dodawanie jest łączne (poprawną odpowiedź podali wszyscy studenci kierunku matematyka i 92,5% (s.e.=1,24) studentów kierunku pedagogika. Potrafią wskazać graficzną reprezentację danego ułamka zwykłego. Znają podstawowe figury geometryczne, radzą sobie z wyznaczaniem obwodów i pól figur płaskich, pól i objętości figur przestrzennych, budową siatek brył, badaniem własności danych figur, określaniem zależności między rodzajami czworokątów (zob. wykres 9.17.).

Przyszli polscy nauczyciele stają się bezradni, gdy należy powiązać ze sobą różne treści matematyczne, zbadać przypadki skrajne, zbadać równoważność dwóch definicji lub ocenić prawdziwość podanych hipotez.

Przyszli polscy nauczyciele stają się bezradni, gdy należy powiązać ze sobą różne treści matematyczne, zbadać przypadki skrajne, zbadać równoważność dwóch definicji lub ocenić prawdziwość podanych hipotez. Badanie ujawniło też braki w podstawowej wiedzy matematycznej. Zaskakujący jest fakt, że aż 26% (s.e.=3,05) studentów kierunku matematyka i 29,5% (s.e.=2,30) studentów kierunku pedagogika twierdziło, że w zbiorze liczb całkowitych odejmowanie jest łączne, przy czym najwięcej błędnych odpowiedzi podali studenci kierunku matematyka studiów I stopnia (35% s.e.=5,72). W przypadku studentów pedagogiki ujawniły się trudności z rozumieniem ułamków dziesiętnych oraz liczb wymiernych i niewymiernych. Na pytanie *Ile ułamków dziesiętnych jest między* 0,20 *a* 0,30*?* aż 42% (s.e.=2,76) studentów kierunku pedagogika studiów I stopnia podało, że 9, a 33,5% (s.e.=2,44), że 10; dla studentów studiów jednolitych tego kierunku odsetki te wyniosły odpowiednio 42% (s.e.=5,05) i 21,4% (s.e.=3,33). 67% (s.e.=3,12) studentów pedagogiki twierdziło, że $-\frac{3}{2}$ jest liczbą niewymierną. Chociaż przyszli nauczyciele znają i potrafią stosować algorytmy działań, to jednak tylko 57% (s.e.=7,76) studentów kierunku matematyka i 26% (s.e.=2,13) studentów kierunku pedagogika umie wyjaśnić poprawność zastosowanego algorytmu. Studenci, zwłaszcza pedagogiki, mają również trudności z rozwiązywaniem równań za pomocą przekształceń równoważnych. Tylko 27% (s.e.=2,18) studentów kierunku pedagogika potrafiło wyjaśnić, dlaczego rozwiązując równanie kwadratowe typu $ax^2 = bx$, $a \neq 0$ nie jest dopuszczalne dzielenie przez x. Dla studentów matematyki odsetek ten wyniósł 78% (s.e.=3,62).

Diagramy Venna

Każdy z trzech uczniów narysował diagram Venna, pokazujący zależności między czterema rodzajami czworokątów: prostokątami (PR), równoległobokami (RW), rombami (RB) i kwadratami (KW).



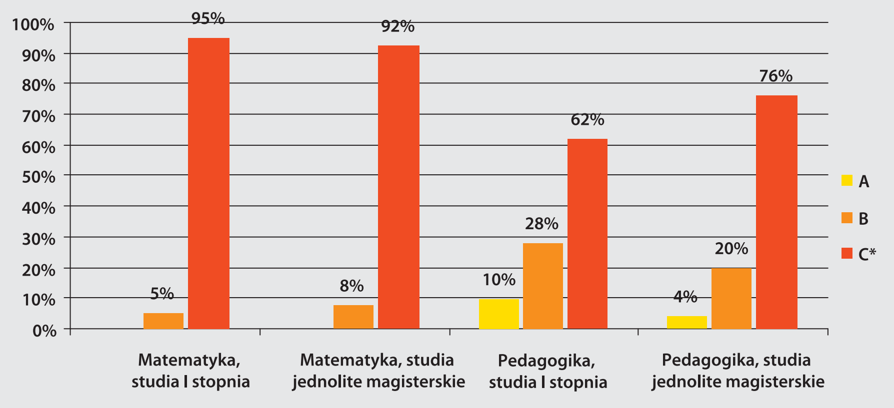
Który uczeń narysował poprawny diagram? *Zaznacz jedną odpowiedź.*

A. Tomek ❑

B. Renata ❑

C. Magda ❑

Wykres 9.17. Rozkład procentowy studentów według odpowiedzi na zadanie *Diagramy Venna* z podziałem na rodzaj i kierunek studiów (gwiazdką zaznaczono poprawną odpowiedź)



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

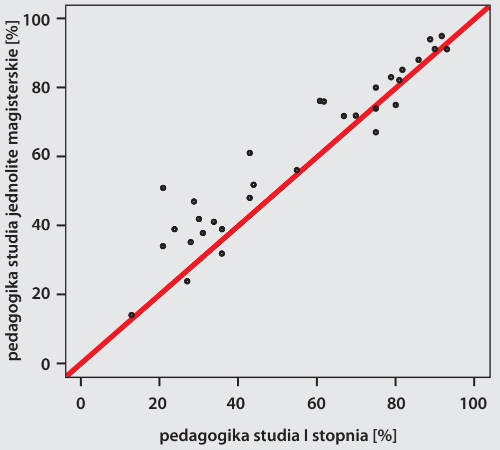
Studenci potrafią porównywać objętości różnych prostopadłościanów, bez wykorzystywania gotowych wzorów (poprzez zliczanie jednostkowych sześcianów zawartych w figurze). Wiedzą, jak zmienią się współrzędne punktu w odbiciu symetrycznym względem jednej z osi współrzędnych. Nie mają większych trudności z bezpośrednim odczytywaniem danych z diagramów kołowych oraz słupkowych. Tego typu zadania rozwiązali poprawnie prawie wszyscy studenci. Natomiast znacznie gorzej radzą sobie w sytuacjach, gdy należy łączyć różne elementy wiedzy, np. gdy na podstawie wykresu przedstawiającego zależność prędkości pewnego rowerzysty od czasu należy określić ukształtowanie terenu, po którym ten rowerzysta jechał (poprawną odpowiedź podało odpowiednio 66,5% (s.e. = 4,90) studentów kierunku matematyka i 33% (s.e.=2,42) kierunku pedagogika).

Studenci matematyki, którzy pisali test dla przyszłych nauczycieli szkół średnich, wykazują się znajomością pojęcia funkcji, w szczególności funkcji liniowej, kwadratowej, wykładniczej, potrafią w sytuacjach typowych i prostych podać ich podstawowe własności, sporządzać wykresy lub na podstawie wykresu określić rodzaj funkcji. Badani nie mieli trudności z rozpoznaniem wykresu funkcji liniowej przedstawiającej relację prostej proporcjonalności, gdy współczynnik proporcjonalności był większy od zera, natomiast już tylko 61% (s.e. = 5,74) studentów studiów I stopnia i 63% (s.e.=11,18) studentów studiów jednolitych magisterskich podało poprawną odpowiedź, gdy współczynnik był ujemny. Co czwarty student studiów I stopnia i co piąty student studiów jednolitych magisterskich nie potrafił właściwie określić zależności funkcyjnej pomiędzy dwoma wielkościami. Studenci mieli trudności z rozróżnieniem liczb wymiernych i niewymiernych, utożsamiając niekiedy przybliżenie liczby niewymiernej z nią samą. Aż 47,9% (s.e. = 6,71) studentów studiów I stopnia i 25,54% (s.e. = 6,53) studentów studiów jednolitych magisterskich twierdziło, że iloraz liczb 22 i 7 jest liczbą niewymierną. Wydaje się, iż przyczyn takiej sytuacji można upatrywać w szkolnych zadaniach matematycznych. Wielokrotnie wykorzystuje się w nich liczbę 22/7 jako przybliżenie liczby π. Ponieważ π jest liczbą niewymierną, więc respondenci błędnie kojarzyli liczbę 22/7 z liczbą niewymierną.

Polscy studenci napotykali duże trudności z matematyzowaniem sytuacji pozamatematycznych, nawet gdy nie były one złożone, doborem odpowiedniego modelu matematycznego do opisanej sytuacji zwierającej kontekst realistyczny (na przykład wykonywali odejmowanie zamiast mnożenia). Mieli również problemy z podaniem przykładu sytuacji, której model był dany. Nie radzili sobie z matematycznym zapisem zależności pomiędzy wielkościami występującymi w tekście zadania. Tylko 51% (s.e. = 6,57) studentów kierunku matematyka i 14% (s.e. = 1,73) studentów kierunku pedagogika rozwiązało poprawnie zadanie, w którym należało zapisać z użyciem symboli matematycznych zależność pomiędzy dwoma rodzajami cukierków, gdy zależność ta była podana słownie z użyciem procentów. 67% (s.e. = 4,72) studentów matematyki i 29% (s.e. = 2,25) studentów pedagogiki potrafiło określić, jaki wpływ na wartość jednej zmiennej (rośnie, maleje, pozostaje bez zmiany) ma zmiana drugiej zmiennej, gdy zależność pomiędzy tymi zmiennymi była dana za pomocą prostego wzoru matematycznego.

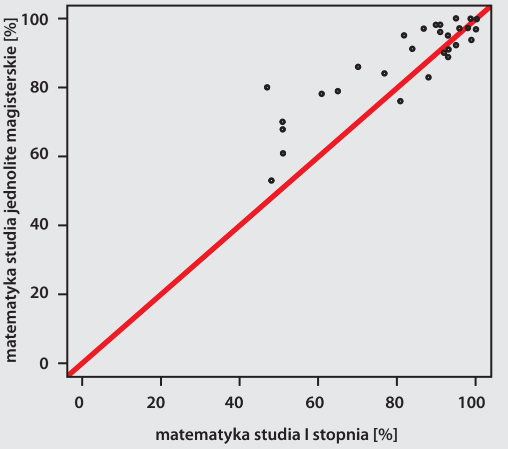
Przyszli nauczyciele potrafili odtworzyć (podać) definicję znanego im pojęcia matematycznego, określić, czy podane sformułowanie można wykorzystać jako definicję danego pojęcia, o ile tylko sformułowanie to jest znane i powszechnie stosowane. Nie radzili sobie natomiast w sytuacjach, w których należało porównać dwa określenia tego samego pojęcia, zbadać, czy podane definicje są równoważne, uzasadnić, że podane stwierdzenie może (nie może) być wykorzystane do definiowania danego pojęcia matematycznego. Wydaje się, że niektóre treści są jedynie powierzchownie zapamiętane przez studentów, bez ich zrozumienia. Na przykład studenci pedagogiki, definiując kwadrat, uwzględniali jedynie równość boków, całkowicie pomijając równość kątów. Studenci matematyki piszący *test rozszerzony* zwracali uwagę na wyrażenie „granica funkcji", natomiast nie przywiązywali wagi do tego, czy jest to granica funkcji w punkcie, czy też gdy x dąży do plus nieskończoności.

Wykres 9.18. Porównanie odpowiedzi studentów pedagogiki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu znajomości treści (zdobywanie wiedzy)



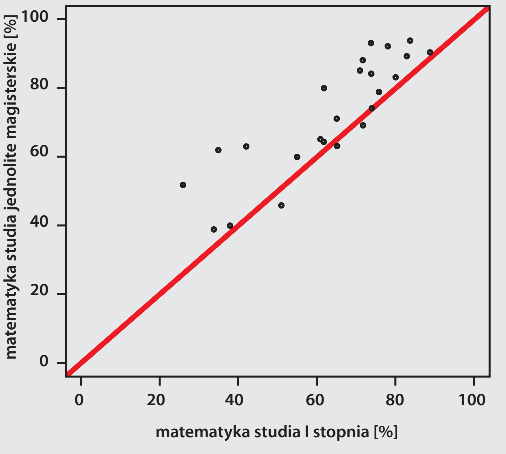
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.19. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu znajomości treści (zdobywanie wiedzy)



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.20. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu rozszerzonego* z zakresu znajomości treści (zdobywanie wiedzy)

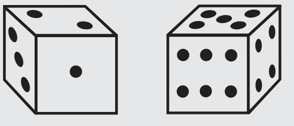


Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Badanie ujawniło, że studenci pedagogiki potrafili stosować wiedzę jedynie do rozwiązywania najprostszych, typowych problemów. Nie mieli trudności z rozwiązaniem zadań algorytmicznych, wymagających wykonania co najwyżej kilku kroków. Dobrze radzili sobie z zadaniami, w których należało zbadać, jaką liczbą – parzystą czy nieparzystą – będzie wartość pewnego wyrażenia algebraicznego, jeżeli w miejsce zmiennych wstawimy liczby parzyste (nieparzyste), zbadać, czy obwód figury danej na geoplanie jest równy 12, obliczyć pole figury jako sumę lub różnicę pól dwóch innych figur, które można obliczyć za pomocą wzorów (poprawną odpowiedź podało 97% studentów kierunku matematyka i 52% kierunku pedagogika). Byli natomiast bezradni w sytuacjach nowych, nietypowych, złożonych, nawet wtedy, gdy stopień komplikacji był niewielki. Studenci kierunku matematyka, którzy pisali *test podstawowy*, wykazali się wysokim poziomem umiejętności stosowania wiedzy matematycznej – tylko kilka zadań z tego obszaru zostało rozwiązanych poprawnie przez mniej niż połowę studentów. Niekiedy studenci, zamiast wykorzystać posiadaną wiedzę matematyczną do rozwiązywania problemów pozamatematycznych, kierowali się naiwną intuicją lub w zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa przeświadczeniem o nieprzewidywalności wyniku, a tym samym braku możliwości wyznaczenia prawdopodobieństw zdarzeń losowych (zob. wykres 9.21.).

Sprawiedliwa gra

Joasia i Franek grają w grę losową, w której rzuca się dwiema sześciennymi kostkami.
Dwie wyrzucone liczby są zapisywane.



Joasia wygrywa, gdy różnica między wyrzuconymi liczbami wynosi 0, 1 lub 2.

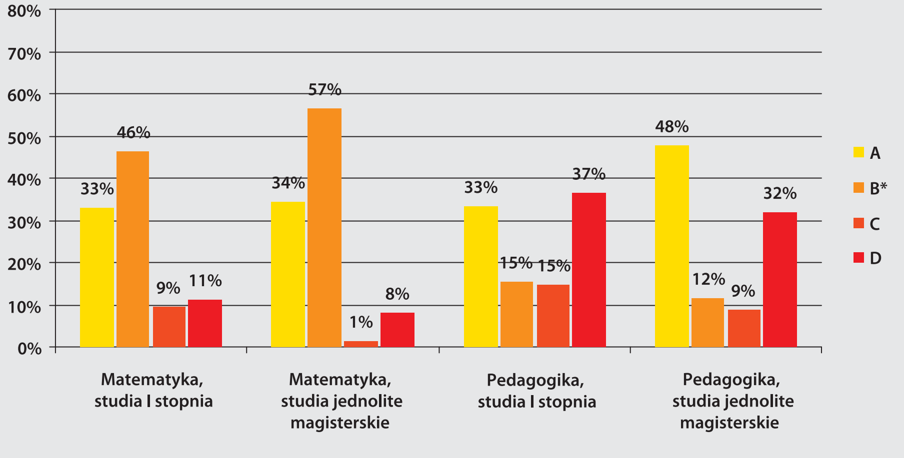
Franek wygrywa, gdy różnica między wyrzuconymi liczbami wynosi 3, 4 lub 5.

Uczniowie dyskutują, czy ta gra jest sprawiedliwa.

Które z następujących stwierdzeń jest prawdziwe? Zaznacz jedną odpowiedź.

A. Oboje mają równe szanse na wygraną. ❑
B. Joasia ma większe szanse na wygraną. ❑
C. Franek ma większe szanse na wygraną. ❑
D. Ponieważ w grze stosuje się kostki liczbowe, nie można powiedzieć, kto ma większe szanse na wygraną. ❑

Wykres 9.21. Rozkład procentowy studentów według odpowiedzi na zadanie *Sprawiedliwa gra* (gwiazdką zaznaczono poprawną odpowiedź)

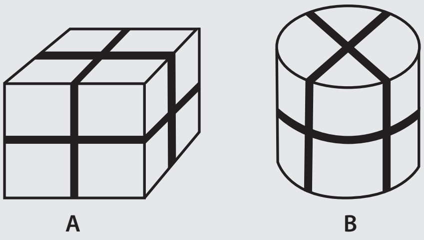


Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Słabą stroną polskich studentów jest brak umiejętności badania sytuacji, opracowania strategii rozwiązania problemu lub weryfikowania uzyskanych rezultatów matematycznych w sytuacji wyjściowej i wyciągania wniosków.

Długość wstążki

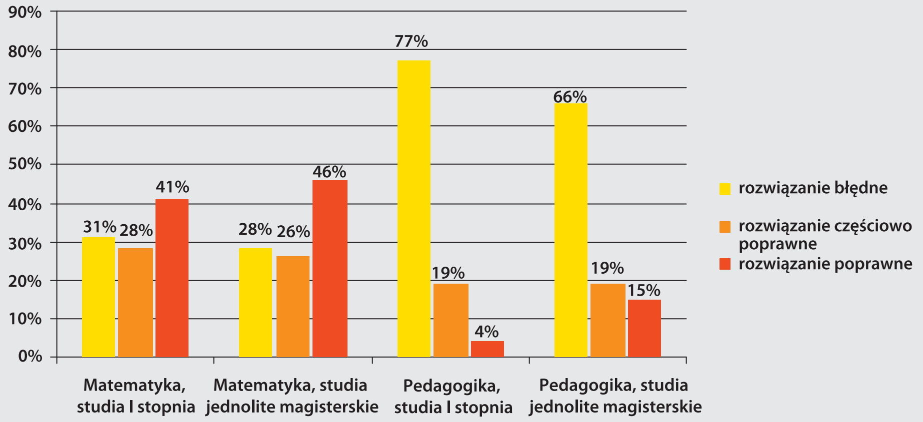
Dwa pudełka na prezenty obwiązano wstążką w sposób pokazany na rysunku niżej. Pudełko A to sześcian o krawędzi 10 cm. Pudełko B to walec o wysokości 10 cm i średnicy 10 cm.



Dla którego pudełka potrzebna jest dłuższa wstążka?

Wyjaśnij Twój sposób rozumowania.

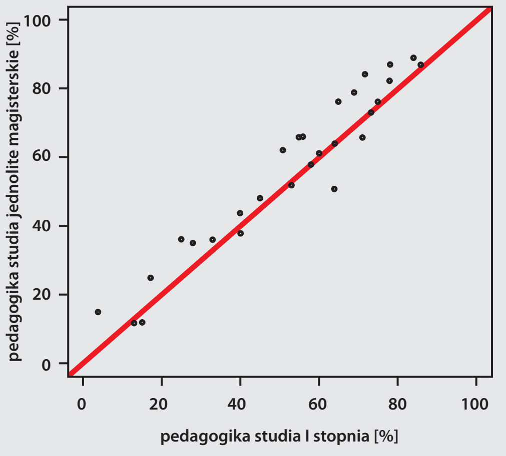
Wykres 9.22. Rozkład procentowy studentów według odpowiedzi na zadanie *Długość wstążki*



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

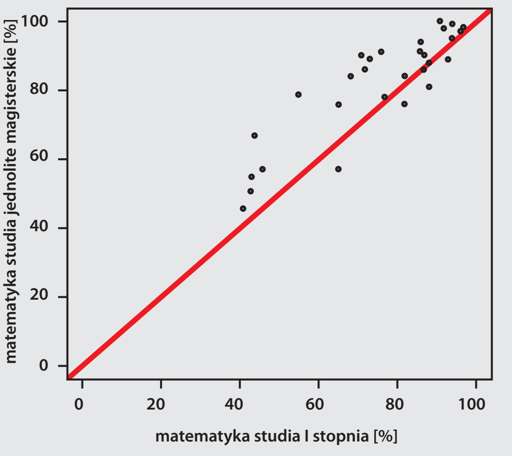
Studenci kierunku matematyka, którzy rozwiązywali *test rozszerzony*, uzyskali znacznie słabsze wyniki niż studenci, którzy pisali *test podstawowy*. Należy jednak zauważyć, że zadania *testu rozszerzonego* wymagały szerszej wiedzy i wyższego poziomu umiejętności jej stosowania. Przyszli nauczyciele wykazali się znajomością podstawowych metod rozwiązywania równań liniowych, kwadratowych, wielomianowych i z sukcesem je stosowali w zadaniach typowych. Natomiast nie radzili sobie, gdy musieli oderwać się od myślenia algorytmicznego, schematycznego, gdy znany schemat postępowania był niewłaściwy w danej sytuacji. Mieli trudności z zadaniami nietypowymi, złożonymi, wymagającymi dokładnej analizy sytuacji, a następnie wypracowania nowej strategii. Przyszli nauczyciele nie potrafili wykorzystać pewnych twierdzeń matematycznych do uzasadnienia innych lub do oceny prawdziwości hipotez. Nie umieli dobrać odpowiedniego modelu matematycznego do sytuacji pozamatematycznej. Tylko 43% (s.e.=6,23) studentów studiów I stopnia i 49% (s.e.=7,02) studentów studiów jednolitych magisterskich podało poprawną odpowiedź na pytanie o typ funkcji (liniowa, kwadratowa, wykładnicza) opisującej stan konta w kolejnych tygodniach, w sytuacji systematycznych, dodatkowych wpłat. Co piąty student (20%, s.e.=6,02) studiów I stopnia i co trzeci (34%, s.e.=6,46) studiów jednolitych magisterskich potrafił bez wykonywania obliczeń, jedynie na podstawie analizy podanych wykresów, stwierdzić, który z przedstawionych rozkładów ma większe odchylenie standardowe. Respondenci umieli wyznaczyć prawdopodobieństwa zdarzeń losowych wykorzystując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. Natomiast nie radzili sobie w sytuacji, w której należało wyznaczyć prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia korzystając z twierdzenia Bayesa. Zadanie dotyczące tych treści rozwiązało poprawnie tylko 7% (s.e.=3,00) studentów studiów I stopnia i 7% (s.e.=3,65) studentów studiów jednolitych magisterskich.

Wykres 9.23. Porównanie odpowiedzi studentów pedagogiki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu stosowania wiedzy



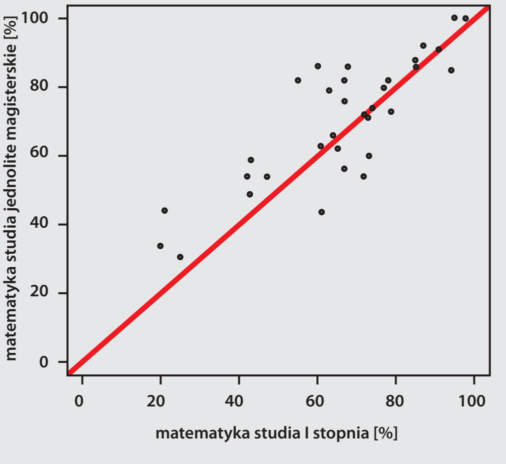
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.24. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu stosowania wiedzy



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.25. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu rozszerzonego* z zakresu stosowania wiedzy



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Dobrze poradzili sobie z zadaniami z obszaru rozumowania studenci pedagogiki i matematyki, którzy pisali *test podstawowy*. Poza trzema zadaniami pozostałe z tego obszaru zostały rozwiązane poprawnie przez ponad połowę studentów pedagogiki. W grupie studentów matematyki odsetek poprawnych odpowiedzi na każde z zadań tego obszaru (z wyjątkiem dwóch) wyniósł powyżej 85%. Studenci potrafili przeprowadzić proste rozumowanie typu matematycznego, badać istnienie obiektów matematycznych, badać zależności pomiędzy figurami geometrycznymi, łączyć informacje zawarte w tekście zadania i na wykresie, a następnie wyciągać z nich wnioski. Jedno z zadań, z którym słabo poradzili sobie zarówno przyszli nauczyciele nauczania wczesnoszkolnego jak i matematyki, dotyczyło określenia zmian procentowych, gdy znane były zmiany liczebnościowe – poprawną odpowiedź podało 53% (s.e.=5,17) studentów kierunku matematyka i 16% (s.e.=1,65) studentów kierunku pedagogika. Drugie zadanie dotyczyło zbadania, czy dane określenie jednoznacznie określa pewną figurę geometryczną i może być użyte jako definicja tej figury; w tym przypadku odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio – 35% (s.e.=4,64) w przypadku studentów matematyki i 10% (s.e.=1,79) w przypadku studentów pedagogiki.

Znacznie gorzej w obszarze rozumowania wypadli studenci kierunku matematyka, którzy rozwiązywali *test rozszerzony*. Nie potrafili oderwać się od najbardziej utrwalonych schematów poznawczych, wyjść poza znane sobie ramy poznania. Na przykład przyjmowali, że dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych i stosowali metody właściwe dla takich sytuacji nawet wtedy, gdy dziedzina była wprost dana – był nią zbiór liczb całkowitych modulo 6 lub zbiór liczb zespolonych. Nie potrafili ocenić poprawności metody zastosowanej w danej sytuacji, zmodyfikować jej lub wypracować nowej. Tylko co trzeci student studiów I stopnia i co drugi studiów jednolitych magisterskich potrafił zrozumieć podaną definicję, a następnie przeprowadzić pewne rozumowanie z jej wykorzystaniem. Respondenci napotykali również trudności z dowodzeniem twierdzeń.

Suma dwóch funkcji

Udowodnij następujące twierdzenie:

Jeśli wykresy funkcji liniowych

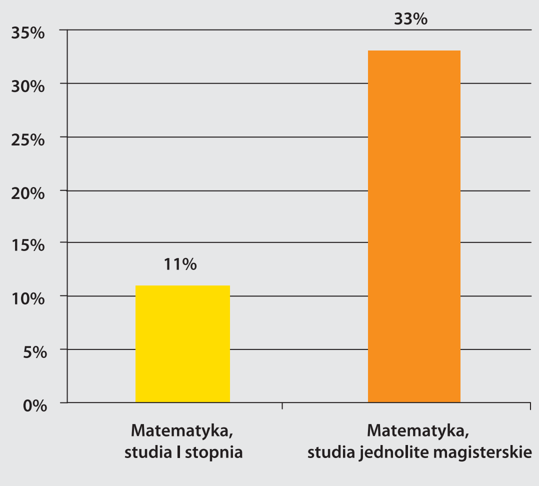
$f(x) = ax + b$ oraz $g(x) = cx + d$

przecinają się w punkcie P na osi x, to wykres funkcji będącej ich sumą

$(f + g)(x)$

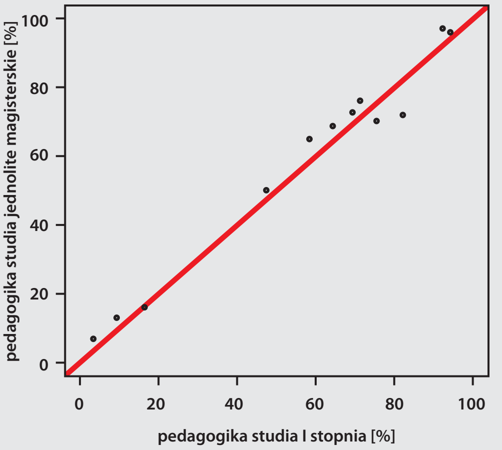
również musi przechodzić przez punkt P.

Wykres 9.26. Odsetki poprawnych odpowiedzi na zadanie *Suma dwóch funkcji*



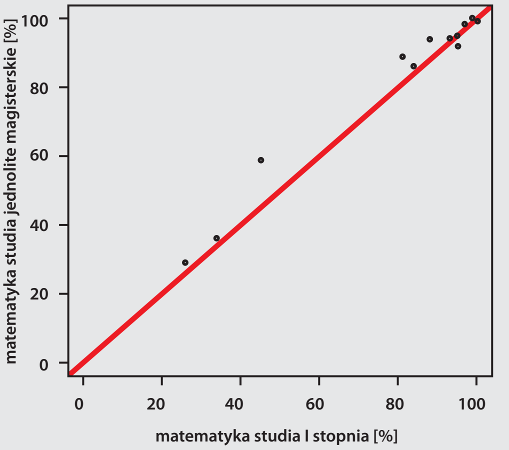
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.27. Porównanie odpowiedzi studentów pedagogiki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu rozumowania



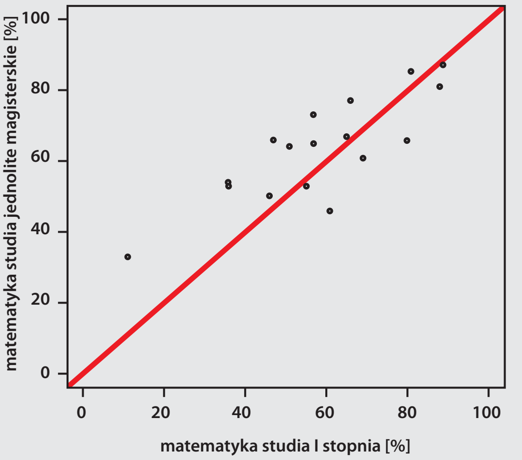
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.28. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu rozumowania



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.29. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu rozszerzonego* z zakresu rozumowania



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

9.6.3. Kompetencje dydaktyczne polskich przyszłych nauczycieli

Polscy studenci znają różne sposoby wprowadzania pojęć matematycznych, umieją właściwie zareagować na najczęściej spotykane błędy uczniowskie, wiedzą, jak odpowiedzieć na typowe pytania. Słabą stroną polskich studentów jest brak umiejętności rozumienia i właściwej oceny nieschematycznych, twórczych rozwiązań zadań przedstawionych przez uczniów, niewłaściwe reagowanie na nietypowe pytania uczniów. Przyszli nauczyciele nie widzą powiązań między treściami matematycznymi, nie wiedzą, które fakty matematyczne są zbędne, a które konieczne do wprowadzenia innych.

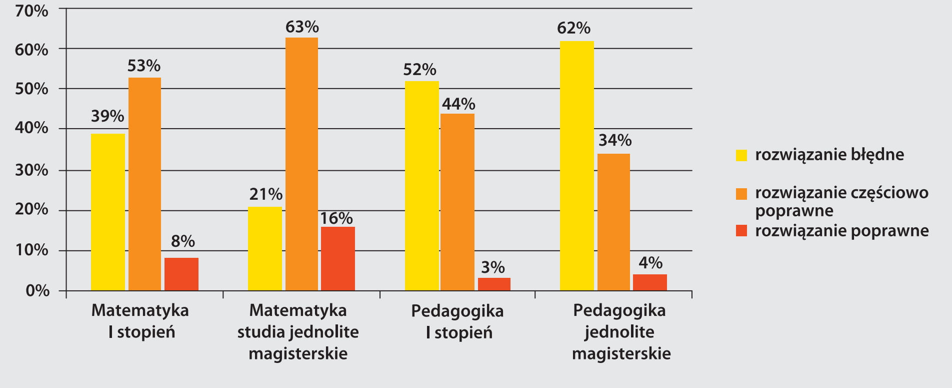
Przyszli nauczyciele są ukierunkowani na pracę z przeciętnym uczniem. Nie posiadają odpowiedniej wiedzy i umiejętności, jak pobudzać i aktywizować uczniów, redukować braki w ich wiedzy i umiejętnościach, wspierać tych, którzy są uzdolnieni matematycznie. Istnieje obawa, że mogą nie odpowiedzieć optymalnie na potrzeby edukacyjnie zróżnicowanej grupy uczniów, co więcej mogą przyczynić się do powstawania blokad poznawczych i emocjonalnych uczniów o niskich umiejętnościach matematycznych lub uczniów uzdolnionych.

Zadania z zakresu dydaktyki matematyki badały umiejętności z trzech obszarów: znajomości powiązań treści, planowania nauczania, przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów.
W obszarze znajomości powiązań treści i planowania nauczania przyszli nauczyciele szkół podstawowych najlepiej poradzili sobie z zadaniami, w których należało: porównać stopień trudności podanych typowych zadań dla uczniów klasy I szkoły podstawowej – poprawną odpowiedź podało 83% (s.e.=3,83) studentów kierunku matematyka i 82% (s.e.=1,66) kierunku pedagogika, ocenić przydatność przedstawionych rysunków do wyjaśnienia sensu pewnego działania w typowej sytuacji, gdy przedstawione sytuacje są powszechnie znane i opisane w literaturze (odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio: 96% i 69%), skonstruować zadanie kontrolujące te same umiejętności co dane zadanie, ale takie, które będzie bardziej przystępne dla ucznia (odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio: 74%, s.e. = 6,16 i 66%, s.e. = 3,71). Słabe wyniki osiągnęli studenci w zadaniach, które wymagały: wskazania koniecznych umiejętności uczniów do rozwiązania podanego zadania (poprawną odpowiedź podało 22%, s.e. = 5,27 studentów kierunku matematyka i 8%, s.e. = 1,22 kierunku pedagogika), przewidywania trudności, jakie mogą napotkać uczniowie podczas rozwiązywania nietypowego zadania (odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio: 18%, s.e. = 6,12 i 10%, s.e. = 1,54). Nie potrafili podać dwóch powodów, którymi kierował się nauczyciel, rozpoczynając naukę o mierzeniu w opisany sposób (odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio: 13%, s.e. = 3,85 i 3%, s.e.= 0,97).

Dwa powody

Gdy pani Hoffman zaczyna uczyć dzieci, jak się mierzy długość, prosi je, aby zmierzyły szerokość książki za pomocą spinaczy do papieru, a następnie za pomocą ołówków.
Jak myślisz, dlaczego nauczycielka woli rozpoczynać właśnie w ten sposób, zamiast od razu nauczyć dzieci, jak się posługiwać linijką? Podaj **DWA** powody.
Odpowiedź uznano za poprawną, jeśli student wymienił dwa spośród trzech powodów i stwierdził, że przedstawiony w tekście zadania sposób uczenia o mierzeniu: ułatwia zrozumienie, czym jest mierzenie, wywołuje potrzebę wprowadzenia jednostki standardowej, wywołuje potrzebę wyboru najbardziej odpowiedniej jednostki. Rozwiązanie zawierające tylko jeden z powodów uznano za częściowo poprawne. Za błędne uznano odpowiedzi, w których skupiono się na rozrywce, motywacji (np. używanie konkretnych przedmiotów jest bardziej przyjemne, motywujące, interesujące i angażujące) lub innych, nieistotnych aspektach (np. po to, by dzieci wiedziały, jak mierzyć za pomocą spinaczy do papieru i ołówków).

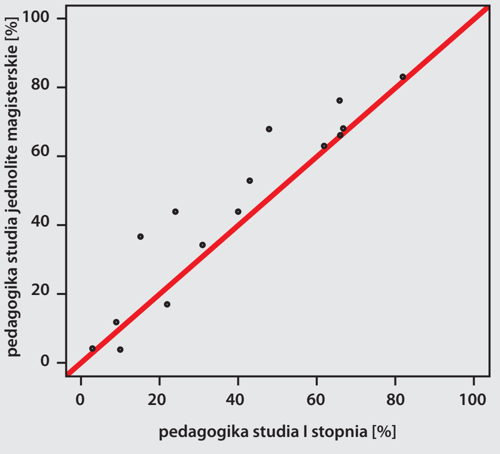
Wykres 9.30. Rozkład procentowy studentów według odpowiedzi na zadanie *Dwa powody*



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

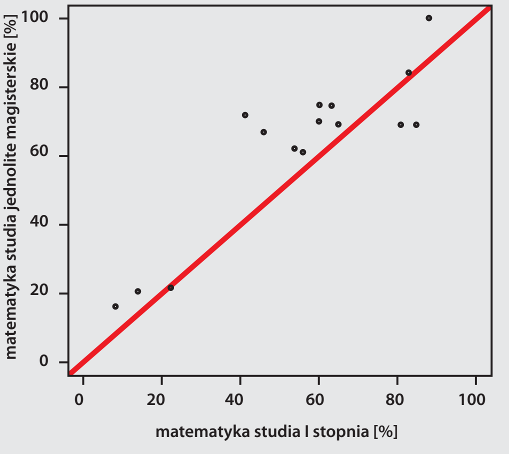
Studenci kierunku matematyka, którzy pisali *test rozszerzony*, wykazali się znajomością treści koniecznych dla zrozumienia wzoru na pierwiastki równania kwadratowego. Znacznie gorzej radzili sobie w sytuacjach, gdy należało podać konsekwencje przesunięcia pewnych treści na inny etap nauczania, czy określić powiązania pomiędzy treściami matematycznymi. Relatywnie niskie wyniki uzyskali również z zadań, w których należało zilustrować treści matematyczne sytuacjami z życia codziennego. W zadaniach tego typu poprawnej odpowiedzi udzieliło ok. 50% studentów.

Wykres 9.31. Porównanie odpowiedzi studentów pedagogiki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu znajomości powiązań treści programowych i planowania nauczania



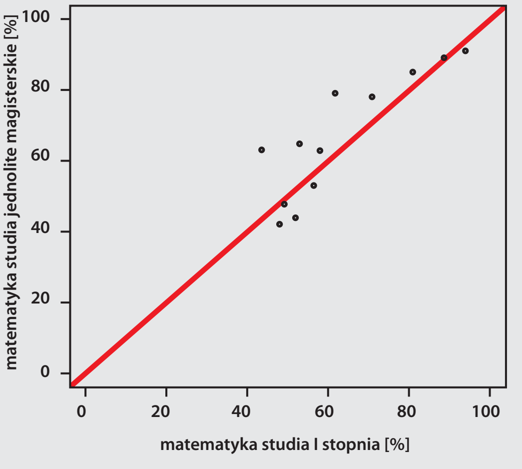
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.32. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu znajomości powiązań treści programowych i planowania nauczania



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.33. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu rozszerzonego* z zakresu znajomości powiązań treści programowych i planowania nauczania

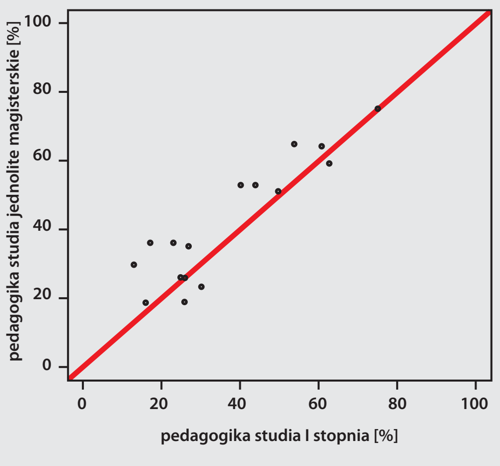


Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

W obszarze przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów dobrze poradzili sobie studenci z zadaniami, w których należało ocenić poprawność sposobu postępowania ucznia podczas wyznaczania pola kwadratu danego na geoplanie. W przypadku typowych sytuacji odsetki poprawnych odpowiedzi wynosiły powyżej 90% w przypadku studentów matematyki, a wahały się od 57 do 75% w przypadku studentów pedagogiki. W przypadku, gdy metoda zastosowana przez ucznia była mniej typowa, poprawnej odpowiedzi udzieliła tylko połowa studentów w obu grupach. Studenci słabo poradzili sobie z zadaniami, w których: w sytuacji nietypowej należało wyjaśnić istotę błędu uczniowskiego – poprawną odpowiedź podało 49% (s.e.= 5,39) studentów kierunku matematyka i 23% (s.e.= 2,77) kierunku pedagogika; sporządzić rysunek ułatwiający uczniowi zrozumienie błędu – odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio: 48% (s.e.= 7,19), 18% (s.e.= 3,39); ocenić, czy metodę zastosowaną przez ucznia w przypadku szczególnym można przenieść na przypadek ogólny (50%, (s.e.=3,58); 17%, (s.e.=1,63); porównać dwa sposoby prezentacji danych (33%, (s.e.= 3,78); 26% (s.e.= 2,65)). Studenci pedagogiki nie potrafili ocenić, czy każde z podanych stwierdzeń jest wystarczające do wyjaśnienia faktu, że odejmowanie nie jest łączne. Odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio: 26%, 44%, 28%, 62%. Około ¾ studentów kierunku matematyka potrafiło dokonać właściwej oceny w każdym z przypadków.

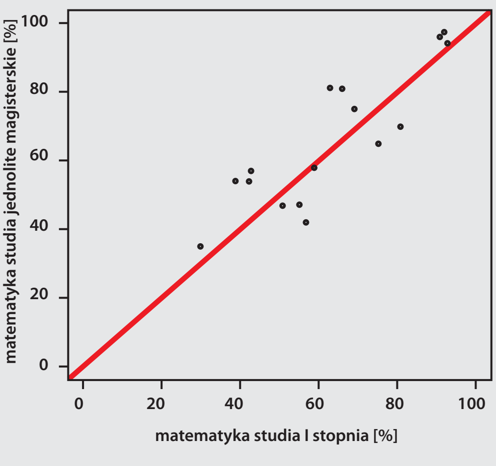
Przyszli nauczyciele szkół średnich właściwie reagowali i poprawnie oceniali prace uczniów z zakresu geometrii. Tego typu zadania bezbłędnie wykonało niemniej niż 80% respondentów. Potrafili też na podstawie rozwiązania określić tok myślenia ucznia i podać najbardziej prawdopodobną przyczynę popełnienia błędu – poprawną odpowiedź podało 84% (s.e. = 4,31) studentów studiów I stopnia i 87% (s.e. = 3,73) studiów jednolitych magisterskich. Znacznie gorzej poradzili sobie w sytuacji, gdy jedynie na podstawie tekstów dwóch zadań, bardzo podobnych pod względem syntaktycznym, należało określić przyczynę większego stopnia trudności jednego z nich: odsetek poprawnych odpowiedzi wyniósł odpowiednio: 39% (s.e = 7,41) i 46% (s.e. = 5,65). Badani napotkali trudności z oceną poprawności dowodów twierdzeń przedstawionych przez uczniów. Jedno zadanie tego typu rozwiązało poprawnie 47% (s.e. = 5,36) studentów studiów I stopnia i 24% (s.e. = 4,24) studiów jednolitych magisterskich; w innym odsetki poprawnych odpowiedzi wyniosły odpowiednio: 36% (s.e. = 4,62) i 19% (s.e. = 5,47).

Wykres 9.34. Porównanie odpowiedzi studentów pedagogiki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów



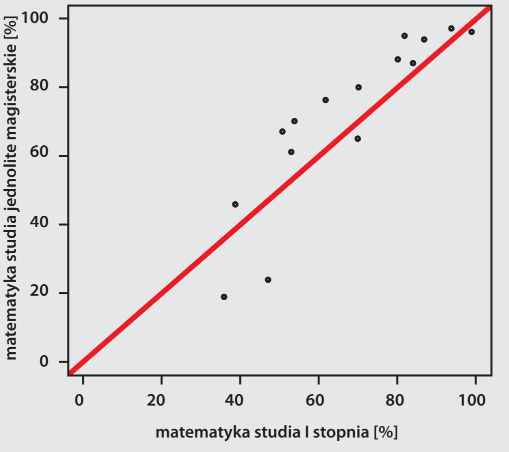
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.35. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu podstawowego* z zakresu przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.36. Porównanie odpowiedzi studentów matematyki na poszczególne pytania *testu rozszerzonego* z zakresu przekazywania wiedzy i odbierania jej od uczniów

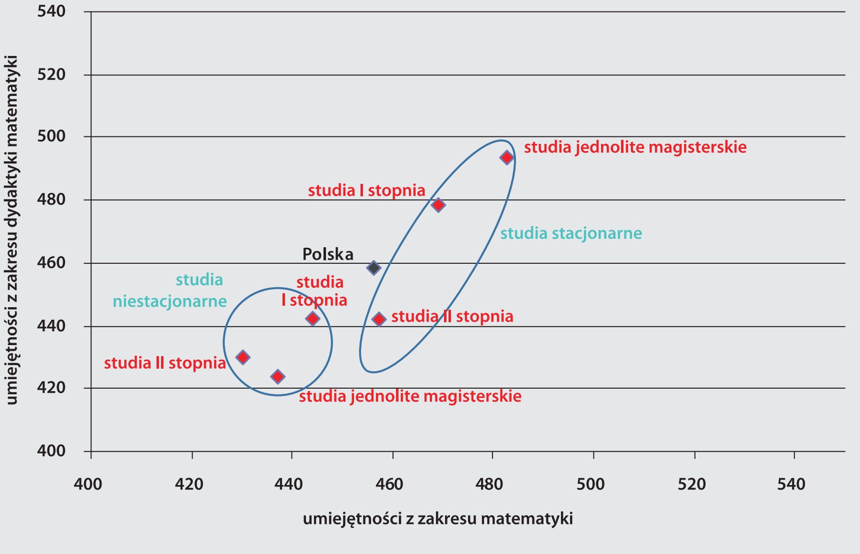


Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

9.6.4. Zróżnicowanie umiejętności polskich przyszłych nauczycieli

Badanie TEDS-M pokazało niespójność dwustopniowego modelu studiów w Polsce. Wielu studentów studiów II stopnia reprezentowało niższy poziom wiedzy i umiejętności niż studenci studiów I stopnia. Istnieją też znaczne różnice między poziomem umiejętności studentów studiów stacjonarnych i niestacjonarnych, które kończą się formalnie takim samym poziomem kwalifikacji.

Wykres 9.37. Zróżnicowanie średnich wyników studentów pedagogiki ze względu na program studiów (tryb i rodzaj studiów)

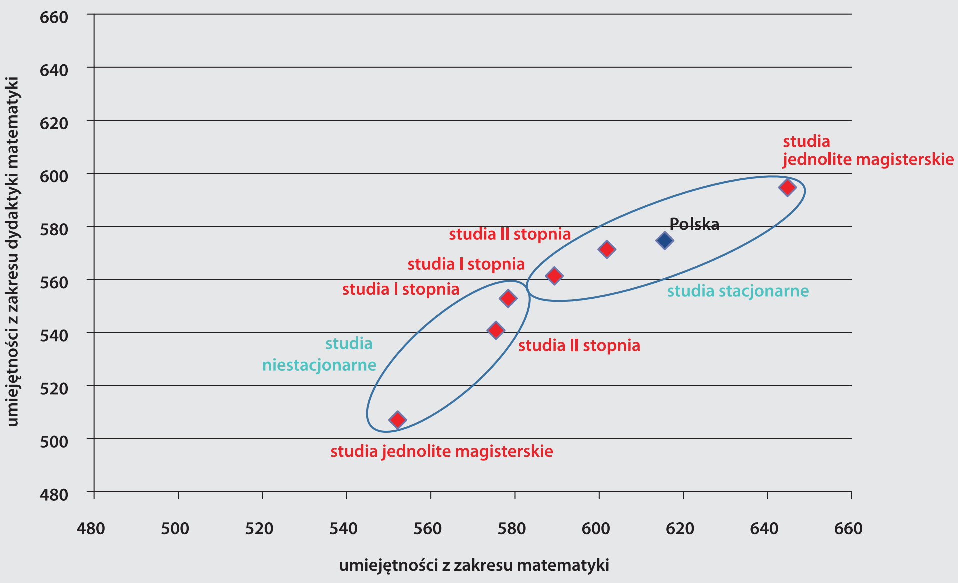


Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

9.6. Kompetencje matematyczne i dydaktyczne studentów – przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki

Badanie studentów kierunku pedagogika potwierdziło potoczny pogląd o znaczącej różnicy między umiejętnościami studentów studiów stacjonarnych i niestacjonarnych. Różnice pomiędzy średnimi wynikami umiejętności matematycznych oraz średnimi wynikami umiejętności z zakresu dydaktyki matematyki studentów na studiach stacjonarnych i niestacjonarnych odpowiadających sobie programów są statystycznie istotne (na poziomie istotności 0,05). Największe różnice dotyczą studentów studiów jednolitych magisterskich; średni wynik studentów studiów niestacjonarnych jest niższy od średniego wyniku studentów studiów stacjonarnych o 45% z zakresu umiejętności matematycznych i o 71% z zakresu dydaktyki matematyki. Studenci studiów niestacjonarnych wykazują też znacznie większe zróżnicowanie poziomu umiejętności w zakresie dydaktyki matematyki niż studenci studiów stacjonarnych. Należy pamiętać, że na studiach niestacjonarnych studiują zarówno studenci, którzy mają pewne doświadczenie dydaktyczne (np. pracujący z dziećmi w przedszkolach), jak i osoby bez takiego doświadczenia.
Wśród studentów kierunku matematyka zdecydowanie najlepiej wypadli studenci studiów jednolitych, którzy pisali test dla przyszłych nauczycieli matematyki szkół podstawowych uzyskując z zakresu umiejętności matematycznych średni wynik 633. Warto zwrócić jednak uwagę, że grupa ta jest najbardziej zróżnicowana pod względem poziomu umiejętności: wyniki różnią się od średniej liczby punktów tej grupy przeciętnie aż o 99 pkt. Tu również widoczna jest znacząca różnica pomiędzy wynikami studentów studiów stacjonarnych i niestacjonarnych; ci pierwsi uzyskali z zakresu umiejętności matematycznych i dydaktycznych odpowiednio 643 i 595 punktów, a drudzy – 552 i 504 punkty. Wyniki studentów studiów I i II stopnia są zadowalające i wbrew oczekiwaniom nie różnią się znacząco. Wprawdzie średnie wyniki studentów na studiach niestacjonarnych na kierunku matematyka, ze względu ma małe liczebności grup, mogą być obarczone relatywnie dużymi błędami standardowymi, to dają one ogólny obraz zróżnicowania wyników.

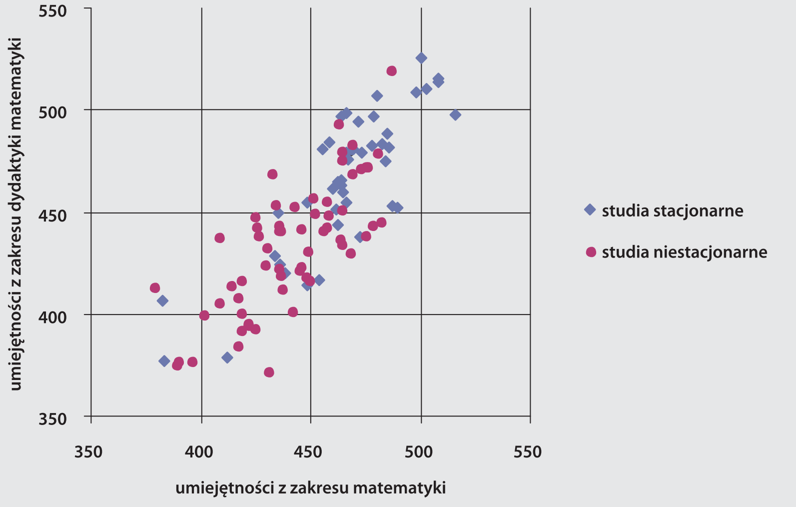
Wykres 9.38. Zróżnicowanie średnich wyników studentów matematyki, którzy pisali test dla przyszłych nauczycieli matematyki szkół podstawowych ze względu na program studiów (tryb i rodzaj studiów)



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

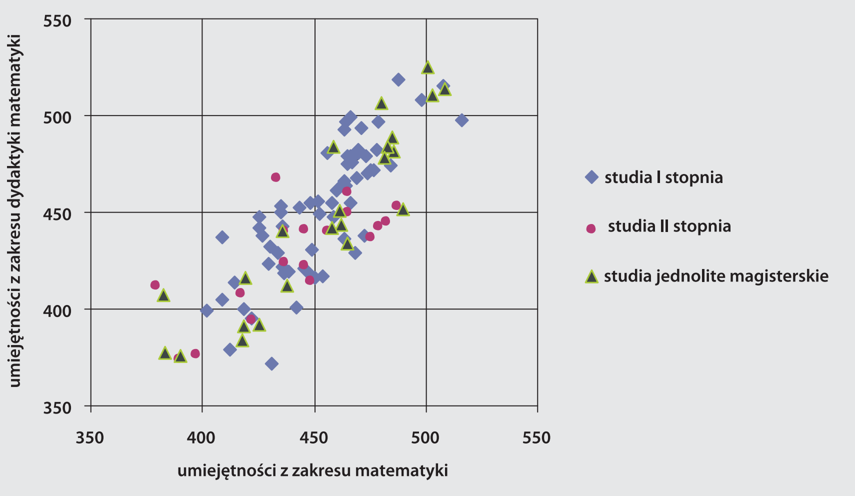
Analiza średnich wyników studentów, nawet w podziale na poszczególne grupy programów studiów, może ukrywać znaczące różnice w poziomie umiejętności uzyskiwanych przez studentów różnego rodzaju instytucji. Wprawdzie najlepsze programy są prowadzone przez uczelnie akademickie, a do najsłabszych programów należą te prowadzone przez uczelnie niepubliczne, to w obu przypadkach poziom jest bardzo zróżnicowany. Na poniższych wykresach zobrazowano zróżnicowanie średnich wyników przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczania przedmiotowego na poziomie instytucji z uwzględnieniem trybu lub rodzaju studiów. Punktami oznaczono instytucje, a miejsce każdego punktu wskazuje średnie wyniki z zakresu wiedzy i umiejętności matematycznych oraz z zakresu dydaktyki matematyki, jakie uzyskali studenci z tej instytucji.

Wykres 9.39. Zróżnicowanie średnich wyników studentów pedagogiki na poziomie instytucji z uwzględnieniem trybu studiów



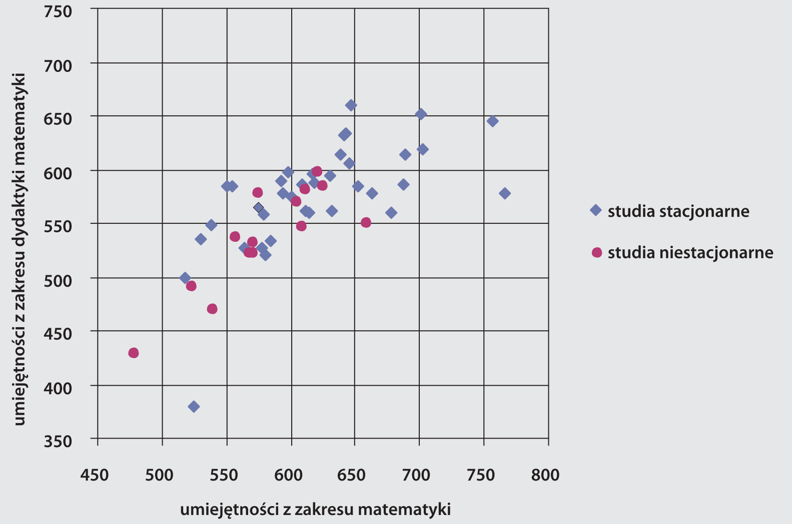
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.40. Zróżnicowanie średnich wyników studentów pedagogiki na poziomie instytucji z uwzględnieniem rodzaju studiów



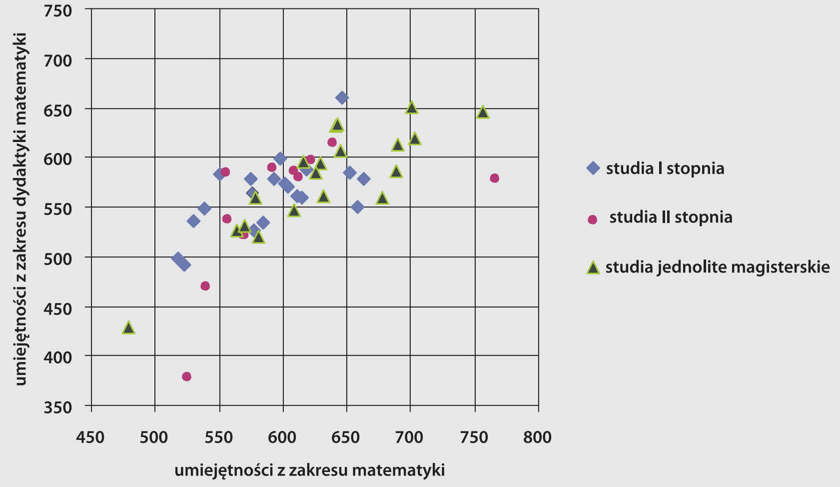
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.41. Zróżnicowanie średnich wyników studentów matematyki, którzy pisali test dla przyszłych nauczycieli szkół podstawowych, na poziomie instytucji z uwzględnieniem trybu studiów



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

Wykres 9.42. Zróżnicowanie średnich wyników studentów matematyki, którzy pisali test dla przyszłych nauczycieli szkół podstawowych, na poziomie instytucji z uwzględnieniem rodzaju studiów



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników badania TEDS-M.

9.6.5. Wizja przyszłości w zawodzie

Badanie TEDS-M ujawniło niską selektywność kandydatów na studia o specjalizacji nauczycielskiej, zwłaszcza na kierunku pedagogika.

Studentów pytano o rodzaj ukończonej szkoły średniej, poziom, na którym uczyli się matematyki w szkole średniej i o średnie wyniki. Zdecydowana większość studentów jest absolwentami liceów ogólnokształcących, choć widoczna jest pod tym względem różnica między studentami pedagogiki i studentami matematyki. Na kierunku pedagogika około jedną czwartą studentów ostatniego roku studiów I i II stopnia stanowią absolwenci liceów profilowanych. W zależności od rodzaju programu studiów jedynie 7–9% studentów pedagogiki podało, że w szkole średniej uczyli się matematyki na poziomie rozszerzonym. Jednocześnie aż połowa studentów pedagogiki deklarowała, że ich stopnie były przeciętne lub należały do niższych w klasie. Ok. 56% (s.e. = 3,1%) studentów studiów I stopnia kierunku matematyka podało, że w szkole średniej uczyło się matematyki na poziomie rozszerzonym, dla studentów studiów jednolitych magisterskich oraz studiów II stopnia odsetki tych studentów wyniosły odpowiednio 41% (s.e. = 3,8%) i 25% (s.e. = 2,2%). Studenci matematyki znacznie częściej deklarowali, że ich oceny były powyżej średniej lub należały do najlepszych w klasie.

Znaczna grupa studentów, zwłaszcza kierunku matematyka, nie wiąże swojej przyszłości ze szkołą lub deklaruje podjęcie pracy w szkole do czasu znalezienia lepszej. Może to świadczyć o przypadkowości wyboru specjalizacji nauczycielskiej na studiach lub niskim prestiżu zawodu nauczyciela.

Pomimo że większość przyszłych nauczycieli wiąże swoją przyszłość z uczeniem w szkole, to odsetek studentów, którzy spodziewają się, że będą uczyć w szkole przez całe życie, jest w Polsce bardzo niski w porównaniu z innymi krajami biorącymi udział w badaniu.

Pomimo że większość przyszłych nauczycieli wiąże swoją przyszłość z uczeniem w szkole, to odsetek studentów, którzy spodziewają się, że będą uczyć w szkole przez całe życie, jest w Polsce bardzo niski w porównaniu z innymi krajami biorącymi udział w badaniu. Około 25% studentów matematyki w Polsce uważa, że być może podejmie pracę w szkole do czasu znalezienia lepszej pracy. 12% studentów studiów I stopnia oraz 23% studentów studiów jednolitych magisterskich stwierdza, że prawdopodobnie nie będzie szukać pracy w szkole. Większe zainteresowanie pracą w szkole deklarują studenci pedagogiki, ale i tutaj ok. 8–9% studentów nie zamierza poszukiwać pracy w szkolnictwie, zaś 23% studentów studiów I stopnia i 16% studentów studiów jednolitych studiów magisterskich jest skłonnych pracować w szkole do czasu znalezienia lepszej pracy.

9.6.6. Wnioski końcowe

Polscy studenci potrafią rozwiązywać zadania typowe, wymagające odtwarzania gotowej wiedzy, z którymi spotykają się na zajęciach lub w trakcie praktyk pedagogicznych. Znacznie gorzej radzą sobie z zadaniami trudniejszymi i złożonymi, w których należy postawić hipotezę, ustalić kategorię rozstrzygnięcia jakiegoś problemu, dobrać właściwy model do opisanej sytuacji, wyjaśnić postępowanie ucznia i ocenić jego pracę, czy zmodyfikować postawiony problem. Trudności pojawiają się, gdy studenci muszą wyjść poza znane sobie sposoby postępowania, podjąć samodzielne decyzje i je uzasadnić. Polscy studenci słabo radzą sobie w sytuacjach, w których muszą wiązać fakty z różnych dziedzin matematyki, określać, które z treści są konieczne, uzupełniające, dodatkowe, a które zbędne dla wprowadzenia nowych pojęć matematycznych, czy schematów postępowania. Nie zawsze potrafią wykorzystać wiedzę i umiejętności matematyczne do rozwiązywania problemów realnych lub zilustrować treści matematyczne sytuacjami z życia codziennego.

Wyniki badania sugerują, że przyszli nauczyciele mają słabo rozwinięte umiejętności złożone. Można zatem przypuszczać, że nie rozwiną tych umiejętności również u swoich uczniów.

Istnieje obawa, że tak przygotowani kandydaci do pracy w zawodzie nauczyciela matematyki są słabo przygotowani do indywidualizacji nauczania i mogą nie poradzić sobie z interpretacją zapisów podstawy programowej z 23 grudnia 2008 r.

9.7. Podsumowanie

Do obowiązkowej matury z matematyki powrócono w 2010 r. w nadziei na podniesienie poziomu nauczania matematyki, lepsze przygotowanie maturzystów do studiowania na kierunkach ścisłych i technicznych, a w związku z tym zwiększenie liczby chętnych na te kierunki. Aby sprawdzić, czy te nadzieje się spełnią, niezbędne będą badania opisujące zmiany w wymienionych obszarach, które nastąpią po roku 2010. O ile dość łatwo będzie można sprawdzić, jak zmienia się liczba chętnych na studia na kierunkach ścisłych i technicznych, to zbadanie, czy po wprowadzeniu obowiązkowej matury z matematyki wzrośnie poziom nauczania tego przedmiotu, nie będzie już takie proste; sama analiza wyników matury może nie wystarczyć.

Dotychczasowy sposób organizacji nauczania matematyki w technikach powoduje, że uczniowie słabo rozwijają swoje uzdolnienia matematyczne. Osiągają gorsze wyniki na maturze niż osoby z liceów ogólnokształcących i mają tym samym mniejszą szansę na studiowanie na dobrych uczelniach. Zmienić się to może po wprowadzeniu reformy programowej do szkół ponadgimnazjalnych.

W klasach I–III szkoły podstawowej uczą obecnie nauczyciele słabo przygotowani do nauczania matematyki. Kończyli oni studia pedagogiczne, na których często nie kładzie się większego nacisku na umiejętności matematyczne i z zakresu dydaktyki matematyki. Niektórzy nauczyciele nauczania wczesnoszkolnego, którzy trafili do zawodu w ciągu ostatnich dwudziestu lat, nie zdawali matematyki na maturze. Skutek jest taki, że matematyka w klasach I–III szkoły podstawowej zbyt często nauczana jest źle, a uczniowie naśladują bez zrozumienia procedury podawane przez nauczyciela. Zniechęcenie do matematyki na tym etapie jest trudne do naprawienia w następnych latach.

Dla podniesienia poziomu nauczania matematyki najpilniejszym zadaniem jest wprowadzenie koniecznych zmian obejmujących nauczanie matematyki w klasach I–III szkoły podstawowej.

Dlatego uważamy, że dla podniesienia poziomu nauczania matematyki najpilniejszym zadaniem jest wprowadzenie koniecznych zmian obejmujących nauczanie matematyki w klasach I–III szkoły podstawowej. Zmiany te powinny objąć nie tylko wprowadzane już zmiany programowe, ale przede wszystkim zmiany w kształceniu matematycznym przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej oraz dokształcanie w tym zakresie już pracujących nauczycieli.

Aneks patrz s. 348.

Aneks

Tabela 1.
Zadania egzaminu maturalnego poziomu podstawowego

Zadanie	Maks. liczba punktów	Standard wymagań	Kontrolowana umiejętność	Grupa maturzystów	Odsetek uczniów z daną liczbą punktów [w %]					
					0	1	2	3	4	5
1	1	REP	Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $\|x-a\| \geq b$	P	38,6	61,4				
				R	7,1	92,9				
2	1	MOD	Wykonanie obliczeń procentowych	P	30,5	69,5				
				R	4,8	95,2				
3	1	INF	Wykorzystanie w obliczeniach praw działań na potęgach	P	6,6	93,4				
				R	0,1	99,9				
4	1	STR	Obliczenie sumy logarytmów	P	34,1	65,9				
				R	2,8	97,2				
5	1	INF	Wykonanie dodawania wielomianów	P	11,1	88,9				
				R	0,5	99,5				
6	1	INF	Rozwiązanie prostego równania wymiernego, prowadzącego do równania liniowego	P	21,1	78,9				
				R	0,8	99,2				
7	1	REP	Sprawdzenie, czy dana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej	P	12,0	88,0				
				R	0,5	99,5				
8	1	REP	Odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli postaci kanonicznej funkcji kwadratowej	P	36,8	63,2				
				R	9,1	90,9				
9	1	REP	Zinterpretowanie współczynników we wzorze funkcji liniowej	P	27,2	72,8				
				R	2,9	97,1				
10	1	REP	Odczytanie wartości funkcji z jej wykresu	P	34,8	65,2				
				R	2,9	97,1				
11	1	INF	Wyznaczenie wyrazów ciągu arytmetycznego	P	15,7	84,3				
				R	3,0	97,0				
12	1	INF	Wyznaczenie wyrazów ciągu geometrycznego	P	25,3	74,7				
				R	1,5	98,5				
13	1	REP	Obliczenie liczby przekątnych wielokąta	P	53,8	46,2				
				R	22,4	77,6				
14	1	REP	Zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	P	30,6	69,4				
				R	2,6	97,4				
15	1	INF	Wyznaczenie długości boku kwadratu wpisanego w okrąg	P	39,9	60,1				
				R	8,9	91,1				
16	1	INF	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia wysokości trójkąta równoramiennego	P	16,0	84,0				
				R	1,9	98,1				
17	1	INF	Posługiwanie się własnościami figur podobnych do obliczania długości odcinków	P	53,5	46,5				
				R	14,2	85,8				

18	1	INF	Korzystanie ze związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta	P	11,0	89,0				
				R	0,7	99,3				
19	1	REP	Obliczenie pola figury płaskiej z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych	P	49,1	50,9				
				R	16,5	83,5				
20	1	REP	Wskazanie współczynnika kierunkowego prostej równoległej do danej prostej	P	28,2	71,8				
				R	5,6	94,4				
21	1	REP	Wskazanie równania okręgu o podanej długości promienia	P	18,5	81,5				
				R	1,0	99,0				
22	1	REP	Obliczenie odległości punktów na płaszczyźnie	P	39,2	60,8				
				R	12,1	87,9				
23	1	INF	Obliczenie pola powierzchni wielościanu	P	19,8	80,2				
				R	4,4	95,6				
24	1	INF	Obliczenie liczby krawędzi wielościanu	P	34,4	65,6				
				R	7,2	92,8				
25	1	INF	Obliczenie średniej arytmetycznej	P	7,4	92,6				
				R	1,3	98,7				
26	2	REP	Rozwiązanie nierówności kwadratowej	P	30,8	29,8	39,4			
				R	1,7	7,5	90,8			
27	2	INF	Rozwiązanie równania wielomianowego	P	36,3	16,8	46,9			
				R	2,6	4,3	93,1			
28	2	ROZ	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego składającego się z niewielkiej liczby kroków	P	93,4	5,0	1,6			
				R	53,8	22,1	24,1			
29	2	STR	Wyznaczenie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego	P	44,3	6,4	49,4			
				R	8,0	6,4	85,6			
30	2	ROZ	Wykazanie prawdziwości nierówności	P	84,5	12,8	2,7			
				R	28,4	19,8	51,8			
31	2	INF	Wykorzystanie związków miarowych w trójkącie prostokątnym i równobocznym	P	53,9	13,2	32,9			
				R	10,4	8,4	81,2			
32	4	STR	Obliczenie objętości wielościanu	P	38,8	26,1	1,5	4,2	29,4	
				R	1,9	5,6	1,0	7,1	84,4	
33	4	MOD	Obliczenie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	P	51,2	25,0	1,8	4,8	17,2	
				R	11,3	20,8	2,6	5,9	59,3	
34	5	MOD	Rozwiązanie zadania umieszczonego w kontekście praktycznym prowadzącego do równania kwadratowego	P	42,2	7,6	16,6	9,5	4,6	19,5
				R	3,4	0,7	3,7	4,0	9,3	78,8

W tabeli uwzględniono wyniki tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy. Maksymalnie z egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym można było uzyskać 50 punktów. W opisie zastosowano skrótowe oznaczenia obszarów standardów, INF – wykorzystanie i tworzenie informacji, REP – wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji, MOD – modelowanie matematyczne, STR – użycie i tworzenie strategii , ROZ – rozumowanie i argumentacja. P – oznacza grupę maturzystów, którzy zdawali egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym, R – grupę maturzystów, którzy zdawali egzamin maturalny również na poziomie rozszerzonym

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE. Obliczenia własne na podstawie danych z CKE, określenie umiejętności w odniesieniu do standardów wymagań egzaminacyjnych za: www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/WYNIKI/raport_matura_2010.pdf

Tabela 2.
Zadania egzaminu maturalnego poziomu podstawowego dla grupy uczniów zdających egzamin maturalny na poziomie rozszerzonym – wskaźniki łatwości zadań

Zadanie	Maturzyści z liceum ogólnokształcącego zdający egzamin na obu poziomach (LO) N=46 026	Maturzyści z liceum profilowanego zdający egzamin na obu poziomach (LP) N=265	Maturzyści z technikum zdający egzamin na obu poziomach (T) N=4041	Różnica LO-T	Różnica LO-LP
1	0,94	0,78	0,83	0,11	0,16
2	0,96	0,89	0,92	0,04	0,07
3	1,00	0,99	1,00	0	0,01
4	0,98	0,80	0,92	0,06	0,18
5	1,00	0,99	0,99	0,01	0,01
6	0,99	0,95	0,97	0,02	0,04
7	1,00	1,00	0,99	0,01	0
8	0,92	0,78	0,84	0,08	0,14
9	0,97	0,91	0,94	0,03	0,06
10	0,98	0,87	0,90	0,08	0,11
11	0,97	0,95	0,95	0,02	0,02
12	0,99	0,95	0,96	0,03	0,04
13	0,79	0,57	0,65	0,14	0,22
14	0,98	0,89	0,93	0,05	0,09
15	0,92	0,79	0,86	0,06	0,13
16	0,98	0,94	0,97	0,01	0,04
17	0,87	0,70	0,76	0,11	0,17
18	0,99	0,97	0,99	0	0,02
19	0,84	0,69	0,74	0,1	0,15
20	0,95	0,85	0,91	0,04	0,1
21	0,99	0,95	0,96	0,03	0,04
22	0,89	0,77	0,81	0,08	0,12
23	0,96	0,90	0,93	0,03	0,06
24	0,93	0,84	0,90	0,03	0,09
25	0,99	0,98	0,98	0,01	0,01
26	0,95	0,77	0,86	0,09	0,18
27	0,96	0,82	0,87	0,09	0,14
28	0,37	0,12	0,19	0,18	0,25
29	0,90	0,70	0,81	0,09	0,2
30	0,64	0,25	0,36	0,28	0,39
31	0,86	0,67	0,76	0,1	0,19
32	0,92	0,72	0,84	0,08	0,2
33	0,71	0,51	0,60	0,11	0,2
34	0,91	0,71	0,81	0,1	0,2

Wyniki odnoszą się jedynie do zadań poziomu podstawowego dla grupy maturzystów zdających egzamin maturalny po raz pierwszy w 2010 roku i zdających egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym. Kolorem zaznaczono różnice wskaźników łatwości wynoszące nie mniej niż 0,25
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Tabela 3.
Zadania egzaminu maturalnego poziomu rozszerzonego

Zadanie	Maks. liczba punktów	Standard wymagań	Kontrolowana umiejętność	Odsetek uczniów z daną liczbą punktów [w %]						
				0	1	2	3	4	5	6
1	4	STR	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną	20,9	5,4	20,3	15,0	38,3		
2	4	STR	Rozwiązanie równania trygonometrycznego	13,1	4,2	9,8	23,6	49,3		
3	4	STR	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do badania funkcji kwadratowej	58,3	3,7	3,8	8,0	26,1		
4	4	STR	Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianów przez dwumian	4,7	24,8	2,5	12,7	55,4		
5	5	MOD	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego	3,7	7,7	7,5	3,1	16,7	61,4	
6	5	STR	Przeprowadzenie dyskusji trójmianu kwadratowego z parametrem	19,9	12,5	5,6	6,2,	9,1,	46,8	
7	6	STR	Zastosowanie równań i nierówności do opisania zależności w prostokątnym układzie współrzędnych	26,3	14,1	23,6	4,9	2,5	6,7	21,9
8	5	ROZ	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego	59,5	7,0	4,6	12,5	3,5	12,9	
9	4	ROZ	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego	16,2	24,4	7,8	14,9	36,8		
10	4	MOD	Obliczenie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	16,1	67,8	5,2	2,6	8,3		
11	5	STR	Obliczenie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii	46,1	19,2	18,0	5,7	5,6	5,4	

W tabeli uwzględniono wyniki tylko tych, którzy w 2010 roku zdawali maturę po raz pierwszy. Maksymalnie z egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym można było uzyskać 50 punktów. W opisie zastosowano skrótowe oznaczenia obszarów standardów, INF – wykorzystanie i tworzenie informacji, REP – wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji, MOD – modelowanie matematyczne, STR – użycie i tworzenie strategii, ROZ – rozumowanie i argumentacja.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z CKE. Obliczenia własne na podstawie danych z CKE, określenie umiejętności w odniesieniu do standardów wymagań egzaminacyjnych za: www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/WYNIKI/raport_matura_2010.pdf

Tabela 4.
Zadania egzaminu maturalnego poziomu rozszerzonego – wskaźniki łatwości zadań

Zadanie	Maturzyści z Liceum Ogólnokształcącego (LO) N=46 026	Maturzyści z Liceum Profilowanego (LP) N=265	Maturzyści z Technikum (T) N=4041	Różnica LO-T	Różnica LO-LP
1	0,64	0,18	0,27	0,37	0,46
2	0,76	0,30	0,37	0,39	0,46
3	0,37	0,07	0,11	0,26	0,30
4	0,75	0,35	0,41	0,34	0,40
5	0,83	0,44	0,59	0,24	0,39
6	0,66	0,17	0,26	0,4	0,49
7	0,44	0,15	0,21	0,23	0,29
8	0,28	0,05	0,09	0,19	0,23
9	0,6	0,26	0,37	0,23	0,34
10	0,31	0,20	0,21	0,10	0,11
11	0,26	0,04	0,07	0,19	0,22

Wyniki odnoszą się jedynie do zadań poziomu rozszerzonego dla grupy maturzystów, którzy w tym roku zdawali egzamin maturalny po raz pierwszy. Kolorem zaznaczono różnice wskaźników łatwości wynoszące nie mniej niż 0,25.
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z CKE.

Tabela 5.
Zadania rozwiązywane na sprawdzianie i egzaminie gimnazjalnym przez licealistów, którzy w 2010 roku zdawali egzamin maturalny

	Zadanie	Maks. liczba punktów	Kontrolowana umiejętność	Grupa maturzystów	Odsetek uczniów z daną liczbą punktów [w %]					
					0	1	2	3	4	5
Sprawdzian	6	1	Przedstawianie rzeczywistej odległości w skali	P	42,6	57,4				
				R	16,6	83,4				
	7	1	Wykonywanie obliczeń procentowych	P	38,6	61,4				
				R	13,9	86,1				
	8	1	Porównywanie objętości prostopadłościanów o tej samej wysokości i podstawach różnych wymiarów (w kontekście realistycznym)	P	30,3	69,7				
				R	16,1	83,9				
	9	1	Wykonywanie obliczeń na ułamkach w zapisie dziesiętnym (w kontekście realistycznym)	P	22,2	77,8				
				R	13,2	86,8				
	10	1	Wykonywanie obliczeń kalendarzowych	P	17,9	82,1				
				R	11,4	88,6				
	11	1	Dobieranie odpowiedniego modelu do zadania tekstowego	P	66,6	33,4				
				R	40,2	59,8				
	12	1	Odczytywanie informacji z diagramu	P	39,2	60,8				
				R	17,2	82,8				
	13	1	Wykonywanie obliczeń zegarowych	P	19,0	81,0				
				R	7,7	92,3				
	24	5	Obliczanie pola powierzchni trapezu i zamiana jednostek pola powierzchni (w kontekście realistycznym)	P	37,0	9,2	10,4	10,3	11,1	22,0
				R	10,5	4,5	7,4	11,6	17,2	48,8
	25	1	Przeprowadzanie prostego rozumowania	P	66,5	33,5				
				R	34,4	65,6				
Egzamin gimnazjalny (część matematyczno-przyrodnicza)	4	1	Przetwarzanie informacji zawartej w tekście (II, OPI)	P	58,8	41,2				
				R	28,7	71,3				
	7	1	Obliczanie rzeczywistej długości trasy, posługując się skalą mapy (I, PRA)	P	32,9	67,1				
				R	10,2	89,8				
	8	1	Ocenianie poprawności doboru mas poszczególnych składników do otrzymania roztworu o zadanym stężeniu (I, PRA)	P	70,1	29,9				
				R	42,4	57,6				
	9	1	Wybieranie spośród podanych figur figury o określonej liczbie osi symetrii (I, FIG)	P	28,8	71,2				
				R	10,7	89,3				
	10	1	Wybieranie spośród podanych figur figury, która nie posiada środka symetrii (I, FIG)	P	55,5	44,5				
				R	27,7	72,3				
	11	1	Porównywanie wielkości wyrażonych w procentach (I, PRA)	P	1,6	98,4				
				R	0,3	99,7				
	12	1	Badanie zgodności podanych stwierdzeń z warunkami zadania (IV, TWR)	P	39,3	60,7				
				R	13,6	86,4				
	15	1	Określanie masy poszczególnych składników w podanej ilości wody (III, PRW)	P	39,8	60,2				
				R	13,8	86,2				
	16	1	Korzystanie z informacji i wyciąganie wniosków (III, ZIN)	P	61,8	38,2				
				R	29,2	70,8				
	17	1	Odczytywanie i przetwarzanie informacji (I, PRA)	P	27,9	72,1				
				R	16,6	83,4				

Egzamin gimnazjalny (część matematyczno-przyrodnicza)	18	1	Przeliczanie jednostek objętości (I, PRA)	P	61,6	38,4				
				R	31,7	68,3				
	19	1	Przekształcanie wzoru algebraicznego (III, ALG)	P	33,5	66,5				
				R	10,7	89,3				
	20	1	Dobieranie modelu odpowiedniego do sytuacji (III, ALG)	P	51,5	48,5				
				R	16,1	83,9				
	26	1	Odczytywanie informacji ze schematu (II, INF)	P	1,8	98,2				
				R	0,7	99,3				
	28	2	Dobieranie wykresów ilustrujących charakter zależności opisanej w zadaniu (IV, MOD)	P	41,4	18,0	40,6			
				R	14,7	9,2	76,1			
	29	2	Tworzenie modelu matematycznego właściwego dla opisanej sytuacji (III, ALG)	P	19,1	33,0	47,9			
				R	2,7	14,7	82,6			
	30	4	Obliczanie kosztu zużytej energii elektrycznej (I, PRA)	P	26,1	18,1	26,7	8,6	20,5	
				R	4,1	5,7	18,0	13,2	59,0	
	32	4	Wyznaczanie objętości graniastosłupa prostego, obliczanie liczby mając dany procent tej liczby, obliczanie pola trapezu (IV, OPR)	P	32,7	24,1	36,9	1,4	4,9	
				R	8,7	8,2	52,4	4,3	26,4	
	33	4	Stosowanie własności trapezu równoramiennego, stosowanie twierdzenia Pitagorasa i obliczanie pola powierzchni prostokąta zgodnie z warunkami zadania (I, FIG)	P	52,0	4,4	8,4	3,9	31,3	
				R	11,7	2,5	6,7	4,1	75,0	

W tabeli zawarto informacje tylko o procencie danych ważnych. W przypadku sprawdzianu systemowe braki danych dla grupy licealistów piszących egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym wyniosły 6,6%, dla grupy licealistów piszących egzamin maturalny na obu poziomach – 7,4%. W przypadku egzaminu gimnazjalnego systemowe braki danych dla tych dwóch grup wyniosły odpowiednio 0,4% i 0,5%. W przypadku egzaminu gimnazjalnego w nawiasie podano obszar standardu i standard, którego dotyczy dane zadanie. Liczbami rzymskimi oznaczono każdy z czterech obszarów standardów: I – umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu, II – wyszukiwanie i stosowanie informacji, III – wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych, IV – stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów. Dla standardów zastosowano skróty: PRA – Uczeń wykonuje obliczenia w różnych sytuacjach praktycznych, FIG – Uczeń posługuje się własnościami figur, ALG – Uczeń posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych, TWR – Uczeń stosuje techniki twórczego rozwiązywania problemów, INF – Uczeń odczytuje informacje, OPI – Uczeń operuje informacją, PRW – Uczeń wskazuje prawidłowości w procesach, w funkcjonowaniu układów i systemów, ZIN – Uczeń stosuje zintegrowaną wiedzę do objaśniania zjawisk przyrodniczych, MOD – Uczeń tworzy modele sytuacji problemowej, OPR – Uczeń opracowuje wyniki. P – oznacza grupę maturzystów, którzy zdawali egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym, R – grupę maturzystów, którzy zdawali egzamin maturalny również na poziomie rozszerzonym.

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z OKE i CKE.

Tabela 6.
Zadania rozwiązywane na sprawdzianie i egzaminie gimnazjalnym przez uczniów technikum, którzy w 2010 roku zdawali egzamin maturalny

	Zadanie	Maks. liczba punktów	Kontrolowana umiejętność	Grupa maturzystów	Odsetek uczniów z daną liczbą punktów [w %]					
					0	1	2	3	4	5
Sprawdzian	5	1	Rozpoznawanie prostokąta o podanej proporcji boków narysowanego w podanej skali (SROZ)	P	22,4	77,6				
				R	6,7	93,3				
	8	1	Opracowanie strategii rozwiązania problemu. Wyznaczanie promienia największego koła mieszczącego się w prostokącie (SPRA)	P	52,2	47,8				
				R	36,4	63,6				
	17	1	Obliczenia procentowe (SPRA)	P	38,3	61,7				
				R	14,4	85,6				
	18	1	Obliczanie liczby na podstawie podanego ułamka tej liczby, działania na ułamkach zwykłych (SPRA)	P	44,1	55,9				
				R	18,3	81,7				
	20	1	Obliczenia związane z czasem podanym w godzinach i minutach (SPRA)	P	39,9	60,1				
				R	26,3	73,7				
	21	2	Przedstawianie danych za pomocą diagramu słupkowego (SPIS)	P	3,0	12,9	84,1			
				R	0,3	1,8	97,9			
	22	5	Obliczenia pieniężne, dobór odpowiedniej strategii obliczeń (SROZ, SPRA)	P	7,8	8,7	12,8	11,2	18,9	40,6
				R	1,4	2,5	4,9	8,6	20,3	62,3
	23	1	Obliczenia procentowe, dobór argumentacji do podanej tezy (SROZ)	P	79,7	20,3				
				R	50,3	49,7				
Egzamin gimnazjalny (część matematyczno-przyrodnicza)	1	1	Przetwarzanie informacji odczytanej z wykresu (II, OPI)	P	47,5	52,5				
				R	21,4	78,6				
	5	1	Wykorzystywanie proporcji do wyznaczania ilości składników mieszaniny w zagadnieniu praktycznym (PRA)	P	30,6	69,4				
				R	8,9	91,1				
	6	1	Obliczenie pola najmniejszej ściany prostopadłościanu, którego wymiary są podane (III, RRW)	P	67,7	32,3				
				R	41,9	58,1				
	7	1	Wykorzystanie własności okręgu wpisanego w trójkąt do rozwiązania problemu z kontekstem praktycznym (I, FIG)	P	60,6	39,4				
				R	46,1	53,9				
	8	1	Dobieranie równania opisującego dane i zależności występujące w tekście zadania (III, ALG)	P	86,7	13,3				
				R	65,4	34,6				
	16	1	Posługiwanie się skalą mapy, wykonywanie obliczeń zgodnie z podaną procedurą (IV, MOD)	P	63,2	36,8				
				R	35,4	64,6				
	17	1	Wybieranie kołowego diagramu procentowego odpowiadającego danym liczbowym w tabeli (II, OPI)	P	44,7	55,3				
				R	17,2	82,8				
	18	1	Krytyczna analiza wniosków z informacji podanych w tabeli (III, PRW)	P	10,5	89,5				
				R	4,6	95,4				
	19	1	Wykonywanie obliczeń procentowych (I, PRA)	P	13,2	86,8				
				R	0,9	99,1				
	20	1	Wyznaczanie średniej arytmetycznej liczb (I, PRA)	P	30,2	69,8				
				R	13,7	86,3				
	21	1	Interpretowanie informacji odczytanych z wykresu (II, OPI)	P	29,4	70,6				
				R	8,7	91,3				

Egzamin gimnazjalny (część matematyczno-przyrodnicza)	22	1	Odczytywanie informacji z wykresu (II, INF)	P	12,8	87,2				
				R	4,2	95,8				
	23	1	Odczytywanie informacji z wykresu (II, INF)	P	6,1	93,9				
				R	2,0	98,0				
	28	4	Umiejętność korzystania z podanego wzoru, obliczenie średnicy okręgu gdy podana jest długość okręgu (I, PRA)	P	31,3	23,7	31,8	10,1	3,1	
				R	10,3	11,1	29,4	30,9	18,3	
	29	3	Przekształcanie wzoru. Wyznaczanie ze wzoru wskazanej zmiennej (III, ALG)	P	79,8	8,2	4,0	8,0		
				R	42,7	14,6	9,4	33,3		
	30	4	Stosowanie twierdzenia Pitagorasa i wykorzystanie własności trójkątów podobnych (IV, MOD, OPR)	P	38,0	32,3	19,9	4,2	5,6	
				R	7,4	23,1	28,0	13,6	27,9	
	31	4	Wykonywanie obliczeń procentowych (w tym: obliczanie VAT) (I, PRA)	P	22,1	15,1	43,0	8,1	11,7	
				R	2,4	5,4	30,9	16,8	44,5	

W tabeli zawarto informacje tylko o procencie danych ważnych. W przypadku sprawdzianu systemowe braki danych dla grupy uczniów technikum piszących egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym wyniosły 7,3%, dla grupy licealistów piszących egzamin maturalny na obu poziomach – 7,1%. W przypadku egzaminu gimnazjalnego systemowe braki danych dla tych dwóch grup wyniosły odpowiednio 0,2% i 0,3%. Przypisanie zadania do odpowiedniego obszaru standardów i opis standardów przyjęto za CKE. W przypadku sprawdzianu, zastosowano następujące skróty: SPIS – pisanie, SROZ – rozumowanie, SINF – korzystanie z informacji, SPRA – wykorzystywanie wiedzy w praktyce.
W przypadku egzaminu gimnazjalnego w nawiasie podano obszar standardu i standard, którego dotyczy dane zadanie. Liczbami rzymskimi oznaczono każdy z czterech obszarów standardów: I – umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu, II – wyszukiwanie i stosowanie informacji, III – wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych, IV – stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów. Dla standardów zastosowano skróty: PRA – Uczeń wykonuje obliczenia w różnych sytuacjach praktycznych, FIG – Uczeń posługuje się własnościami figur, ALG – Uczeń posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych, TWR – Uczeń stosuje techniki twórczego rozwiązywania problemów, INF – Uczeń odczytuje informacje, OPI – Uczeń operuje informacją, PRW – Uczeń wskazuje prawidłowości w procesach, w funkcjonowaniu układów i systemów, ZIN – Uczeń stosuje zintegrowaną wiedzę do objaśniania zjawisk przyrodniczych, MOD – Uczeń tworzy modele sytuacji problemowej, OPR – Uczeń opracowuje wyniki. P – oznacza grupę maturzystów, którzy zdawali egzamin maturalny tylko na poziomie podstawowym, R – grupę maturzystów, którzy zdawali egzamin maturalny również na poziomie rozszerzonym.
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z OKE i CKE.

Bibliografia

Czajkowska, M., Jasińska, A. i Sitek, M. (2010). *Kształcenie nauczycieli w Polsce. Wyniki międzynarodowego badania TEDS-M 2008.* Warszawa: Instytut Filozofii i Socjologii Polskiej Akademii Nauk.

Dagiel, M. i Żytko, M. (red.). (2009). *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski, M. (2008). *Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów, (wyd. II zmienione).* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski, M. (red.). (2009a). *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008.* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski, M. (red.). (2009b*). Trzecioklasista pół roku później. Raport z badań dystansowych w klasie czwartej 2008/2009.* Strona internetowa: www.trzecioklasista.cke-efs.pl.

Dąbrowski, M. i Żytko, M. (red.). (2007). *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. I: Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski, M. i Żytko, M. (red.). (2008). *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. II: Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Demby, A. (2009). Umiejętności uczniów na początku klasy IV (cz. 1). *Matematyka w Szkole, 48*, 3–8.

Demby, A. (w druku). *Badanie wiedzy matematycznej uczniów po klasie III szkoły podstawowej*. Warszawa: Instytut Problemów Współczesnej Cywilizacji.

Gruszczyk-Kolczyńska, E., Rozpoznawanie uzdolnień matematycznych u dzieci i wspomaganie ich rozwoju w domu, w przedszkolu i w szkole. (maszynopis)

Grzęda, M. (2009). *Nauczyciele matematyki w Polsce – raport z badania TEDS-M*. Warszawa: Instytut Filozofii i Socjologii Polskiej Akademii Nauk.

Kalinowska, A. (2010). *Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty w kształceniu myślenia matematycznego.* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Kalinowska, A. i Murawska, B. (red.). (2009*). Diagnoza umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych województwa kujawsko-pomorskiego*. Bydgoszcz: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Klus-Stańska, D. (2005). Mentalne zniewolenie nauczycieli wczesnej edukacji – epizod czy prawidłowość. *Problemy Wczesnej Edukacji 1*, 55–66.

Klus-Stańska, D. (2010). Nauczycielska tożsamość zawodowa jako konstrukt negocjowany społecznie, czyli o pozorach podmiotowości nauczyciela wczesnej edukacji. W: D. Waloszek (red.), *Edukacja szkolna i wczesnoszkolna. Obszary sporów, poszukiwań, wyzwań i doświadczeń w kontekście zmian oświatowych*. (s. 43-60) Kraków: Wydawnictwo Centrum Edukacyjne Bliżej Przedszkola.

Kopia, H. (zestawił) (1900). *Ustawy i rozporządzenia obowiązujące w galicyjskich szkołach średnich*. Lwów.

Kupisiewicz, Cz. (2009). Zmiana (change) i wzmacnianie (strengthening) – słowa klucze współczesnych reform szkolnych. W*: Edukacja narodowym priorytetem. Księga jubileuszowa w 85 rocznicę urodzin Profesora Czesława Kupisiewicza.* Sosnowiec: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Humanitas.

Lipiński, J. (1812). *Wewnętrzne urządzenie szkół departamentowych*. Warszawa.

Lubomirski, J.T. (red.). (1885). *Encyklopedia wychowawcza*, (t.2). Warszawa.

Majchrowicz, F. (1896). W sprawie egzaminów dojrzałości w naszych szkołach średnich. W: *„Muzeum”*. Lwów: Towarzystwo Nauczycieli Szkół Wyższych.

Marquand, J. (1993). *Studium wstępne krajowego systemu oceniania w polskim szkolnictwie ponadpodstawowym*. Warszawa: Ministerstwo Edukacji Narodowej.

Mrożek, E. (w druku). Task variables in compare word problems Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego seria V Didactica Mathematicae. Kraków: Uniwersytet Pedagogiczny.

Praca zbiorowa, (2011). *Strategia nauczania matematyki w Polsce - wdrożenie nowej podstawy programowej*. Warszawa: Wydawnictwo Instytutu Problemów Współczesnej Cywilizacji im. Marka Dietricha.

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu dnia 6 listopada 2001 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dziennik Ustaw Nr 128 pozycja1419 z 19 listopada 2001).

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu dnia 7 września 2004 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych. (Dziennik Ustaw Nr 199 pozycja 2046 z 13 września 2004).

Sprawozdanie z projektu badawczego Wspomaganie rozwoju umysłowego wraz z edukacją matematyczną dzieci w klasie zerowej i w pierwszym roku nauki szkolnej, finansowanego ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2006–2009. (niepublikowane)

Żytko, M. (2010). *Pozwólmy dzieciom mówić i pisać – o umiejętnościach językowych trzecioklasistów*, Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.