KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE entuzjaści edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

RAPORT Z BADANIA

Zespół Dydaktyk Szczegółowych

DIAGNOZA KOMPETENCJI GIMNAZJALISTÓW

MATEMATYKA

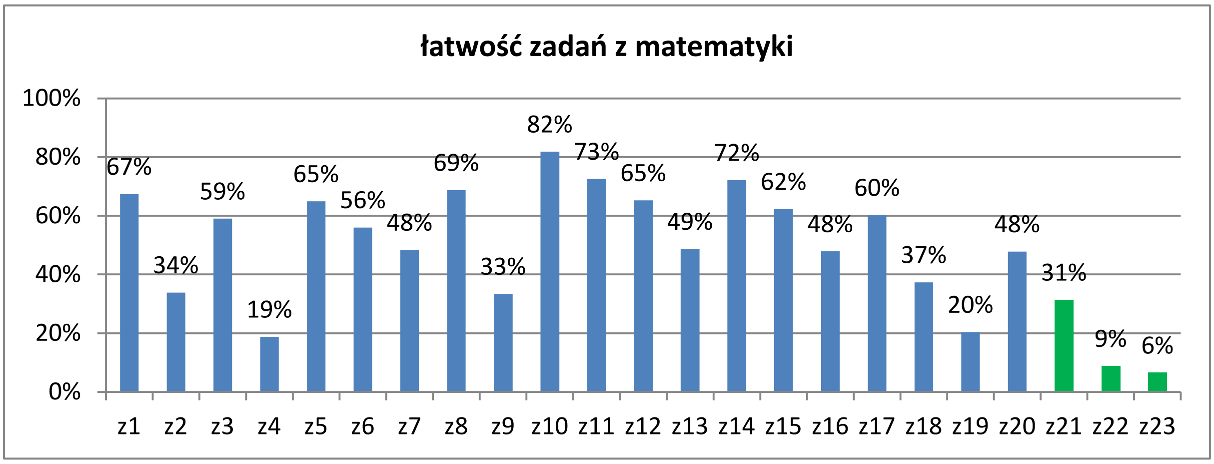
Warszawa, Luty 2012

1. Analiza zestawu zadań

Uczniowie poddani diagnozie gimnazjalnej mieli w części matematycznej rozwiązać 23 zadania, w tym 20 zadań zamkniętych i 3 zadania otwarte. Współczynniki łatwości wszystkich zadań (zaokrąglone do jedności) podano w tabeli i na diagramie.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Łatwość	67%	34%	59%	19%	65%	56%	48%	69%	33%	82%	73%	65%

Numer zadania	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Łatwość	49%	72%	62%	48%	60%	37%	20%	48%	31%	9%	6%



Na diagramie kolorem niebieskim oznaczono zadania zamknięte, a kolorem zielonym zadania otwarte.

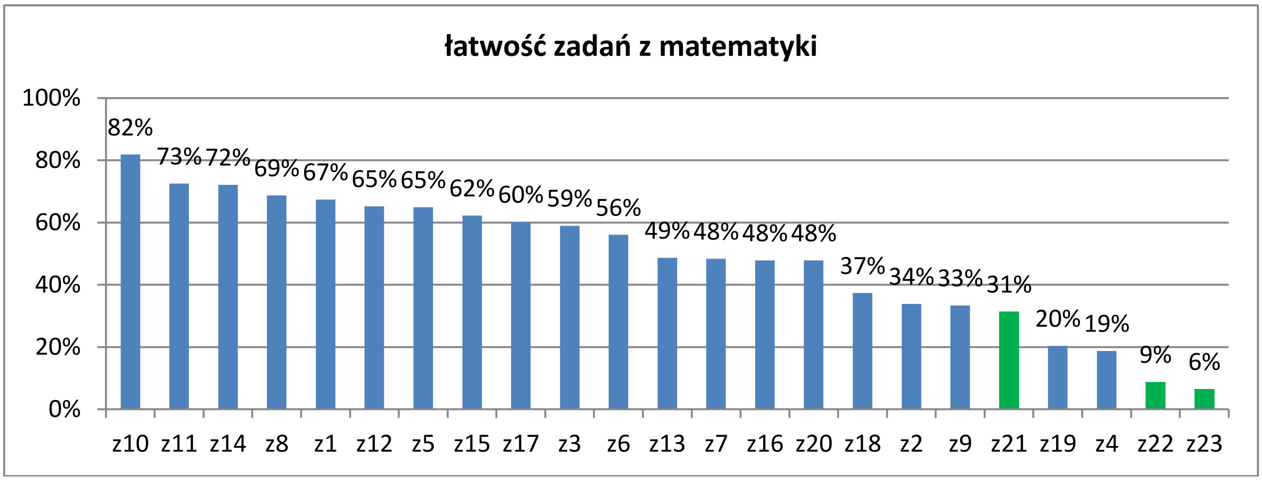
Trzy spośród zadań zamkniętych dotyczyły zagadnień, z którymi część uczniów mogła się jeszcze nie zapoznać na lekcjach. Są to zadania dotyczące mediany (zad. 2.), rachunku prawdopodobieństwa (zad. 14.) i objętości walca (zad. 20.). Ten fakt wpłynął zapewne na wyniki testu, ale nie oznacza to, że umieszczenie tych zadań w zestawie było błędem. Zestaw miał m. in. informować uczniów i nauczycieli, jak wyglądać będzie nowy egzamin gimnazjalny. Nie uwzględnienie w arkuszu niektórych istotnych działów, np. rachunku prawdopodobieństwa, mogłoby sugerować, że, tak jak do tej pory, działy te nie będą obecne na egzaminie. Okazało się zresztą, że zadanie z rachunku prawdopodobieństwa nie było dla uczniów trudne (łatwość 72%).

O ile zadań zamkniętych uczniowie raczej nie opuszczali (przeciętnie 0,2% uczniów nie udzielało żadnej odpowiedzi na zadanie zamknięte), to dla dwóch z trzech zadań otwartych opuszczeń było dużo: zadanie 21. opuściło tylko 4% uczniów, ale już zadanie 22. – 27,8%, a zadanie 23. – 25% uczniów.

W jedenastu zadaniach wyższą średnią liczbę punktów miały dziewczynki, a w trzynastu – chłopcy. Różnice były jednak bardzo niewielkie. Wyjątkiem było zadanie 14. (z rachunku prawdopodobieństwa), w którym chłopcy mieli średni wynik wyższy o $\frac{1}{8}$ punktu.

1.1. Porównanie rzeczywistej trudności zadań z uczniowską oceną trudności zadań

Na poniższym diagramie ustawiono zadania w kolejności od najłatwiejszego do najtrudniejszego (zadania otwarte wyróżniono innym kolorem).



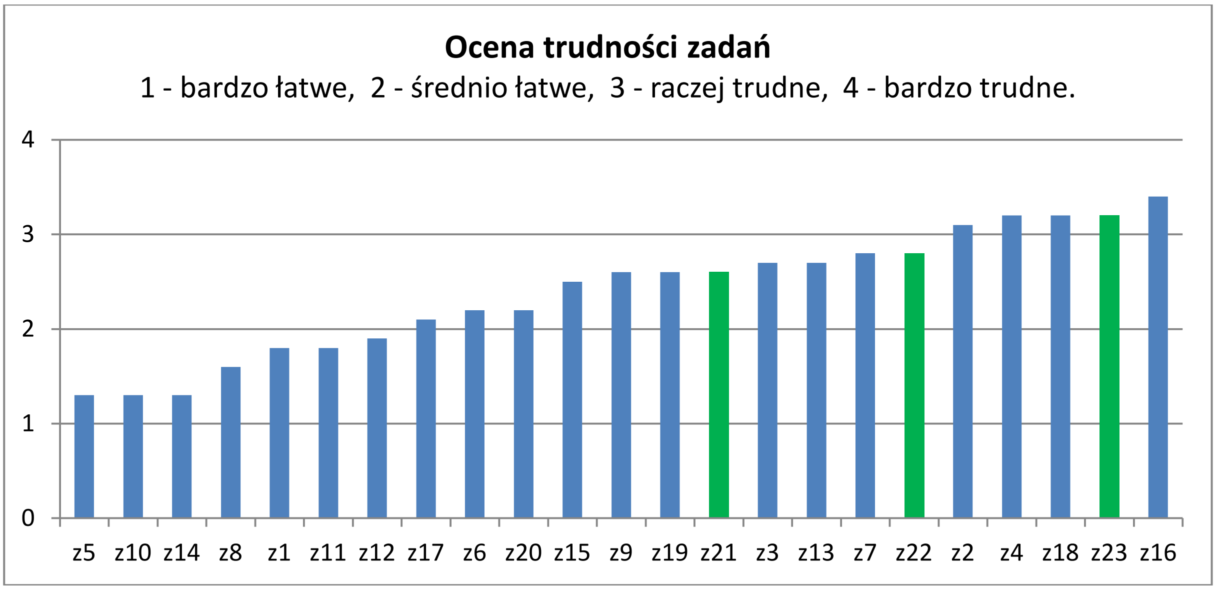
Na podstawie wyników badania można stwierdzić, że najłatwiejsze dla uczniów okazały się zdania 10. i 11. (odpowiednio 82% i 73%) dotyczące odczytywania informacji ze schematu i wykresu funkcji. Nie jest to zaskoczeniem, gdyż zadania sprawdzające tę umiejętność już od kilku lat osiągają na egzaminach gimnazjalnych wysokie współczynniki łatwości. Są one także lubiane przez uczniów i nauczycieli.

Również stosunkowo łatwe (72%) okazało zadanie 14. z rachunku prawdopodobieństwa. Jest to dość zaskakujące, gdyż nie wszyscy uczniowie zapoznali się z tą tematyką na lekcjach matematyki, ponieważ nie we wszystkich szkołach dział ten został już zrealizowany.

Stosunkowo wysokie współczynniki łatwości miały też zadania 8. (obliczenie rozmiaru ramy roweru na podstawie słownego przepisu), 1. (obliczenia na podstawie informacji podanych w tabeli – statystyka opisowa), 12. (obliczenie wartości wyrażenia algebraicznego) i 5. (ocena prawdziwości zdań dotyczących liczb całkowitych).

Bezpośrednio po zakończeniu pisania testu z matematyki w 20 losowo wybranych szkołach przeprowadzone zostały wywiady grupowe z uczniami jednej klasy biorącej udział w teście. W czasie tych wywiadów uczniowie między innymi oceniali trudność poszczególnych zadań w skali: 1 – zadanie bardzo łatwe, 2 – zadanie średnio łatwe, 3 – zadanie raczej trudne i 4 – zadanie bardzo trudne.

Na kolejnym wykresie zadania także ustawiono w kolejności od najłatwiejszego do najtrudniejszego, ale tym razem według opinii uczniów.



Okazuje się, że uczniowie najczęściej wskazywali jako najłatwiejsze dokładnie te zadania, które rzeczywiście okazały się najłatwiejsze. I tak w ocenie uczniów najłatwiejsze w całym arkuszu były zadania 10., 14. i 5 – średnio ocenione na 1,3 czyli bardzo łatwe. Następne pod względem łatwości były zadania 8., 11., 1. i 12. z ocenami od 1,6 do 1,9. Dokładnie te siedem zadań znalazło się na początku listy najłatwiejszych pod względem współczynnika łatwości (trochę inna była ich kolejność).

Większe różnice między oceną trudności zadań dokonaną przez uczniów, a rzeczywistą trudnością tych zadań pojawiają się na dalszych miejscach. I tak uczniowie nie docenili trudności zadania 21. (zadanie otwarte o kutrach), czy zadania 9. (algebraizacja przepisu słownego na obliczanie rozmiaru ramy rowerowej). Ocenili je na 2,6, czyli mniej niż „raczej trudne", gdy tymczasem miały one współczynniki łatwości zaledwie 31% i 33%. Co ciekawe nawet zadanie 22. (uzasadnienie podzielności) nie wydawało się uczniom bardzo trudne – ocenili je na 2,8, czyli również mniej niż „raczej trudne", podczas, gdy rzeczywista rozwiązywalność tego zadania wyniosła zaledwie 9%.

Stosunkowo niska ocena trudności wymienionych trzech zadań świadczy o tym, że uczniowie czuli się dość pewnie w zagadnieniach, których te zadania dotyczyły. Czym spowodowany jest zatem niski rzeczywisty wynik osiągnięty w tych zadaniach? Próby wyjaśnienia tych rozbieżności zawarte są w dalszej części raportu, poświęconej omówieniu poszczególnych zadań.

Jako najtrudniejsze w całym arkuszu uczniowie ocenili zadania 2. (mediana), 18. (obwód figury z ćwiartek koła), 4. (potęgi), 23. (zadanie otwarte z sześcienną klatką) i 16. (podobieństwo trójkątów). Również w tej ocenie pomylili się niewiele, ponieważ tylko zadanie 16. okazało się łatwiejsze niż przypuszczali – rozwiązało je 48% uczniów. Pozostałe wymienione zadania rzeczywiście okazały się jednymi z najtrudniejszych w arkuszu.

2. Opis szkół osiągających najlepsze wyniki w badaniu

Do badania wylosowano 80 szkół: 16 z małych miast (do 20 tys. mieszkańców), 16 ze średnich miast (od 20 do 100 tys. mieszkańców), 20 z dużych miast (powyżej 100 tys. mieszkańców) oraz 28 szkół z terenów wiejskich.

W kolejnym rozdziale, w którym omawiane są poszczególne zadania, zamieszczone są rozkłady wyników każdego zadania dla wszystkich szkół, biorących udział w badaniu. Warto zwrócić uwagę, jak duże są różnice wyników osiąganych dla danego zadania przez poszczególne szkoły. Jednak, co ciekawe, wyjątkowo zdarza się, żeby szkoła, osiągająca w jednym zadaniu wysoką pozycję, w innym zadaniu wypadała słabo. W znacznej większości zadań najlepsze wyniki osiągają te same szkoły.

Wśród 10 szkół, które w badaniu osiągnęły najlepsze rezultaty są bardzo różne szkoły: zarówno publiczne, jak i prywatne. Są szkoły małe (do 50 uczniów na poziomie klasy III), szkoły średnie (między 50 a 100 uczniów) oraz szkoły duże (powyżej 100 uczniów na poziomie klasy III). Są szkoły z małych, średnich i dużych miast. Nie ma natomiast ani jednej szkoły wiejskiej.

Tym natomiast, co łączy wszystkie 10 szkół, osiągających w badaniu najlepsze rezultaty, jest fakt, że wszystkie te szkoły osiągały dobre lub bardzo dobre wyniki na dotychczasowych egzaminach w części matematyczno-przyrodniczej. Oznacza to, że wynik osiągnięty w tym badaniu nie jest przypadkowy – najlepsze okazały się te szkoły, w których od kilku przynajmniej lat dobrze uczy się matematyki.

Wśród kolejnych 10 szkół zajmujących w części matematycznej badania lokaty od 11 do 20 również znalazły się szkoły małe, średnie i duże, z małych, średnich i dużych miast oraz jedna szkoła wiejska. Szkoły te na dotychczasowych egzaminach gimnazjalnych osiągały wyniki średnie lub nieco wyższe niż średnie. Wyjątkiem jest jedna duża szkoła ze średniego miasta, która w badaniu osiągnęła wynik w pierwszej dwudziestce, a na dotychczasowych egzaminach miała wynik nieco poniżej średniej.

Wydaje się zatem, że wyniki badania potwierdzają intuicyjną regułę, że w matematyce nie jest łatwo o nagłe podniesienie wyniku w skali całej szkoły. Tylko długotrwała, systematyczna praca, wsparta być może jeszcze innymi działaniami, może prowadzić do lepszych osiągnięć uczniów.

3. Analiza wyników poszczególnych zadań

Poniżej prezentujemy uzyskane w badaniu wyniki kolejnych zadań z arkusza. Każde zadanie opatrzone zostało dwiema informacjami. Po pierwsze w tabeli przedstawiono procent udzielonych odpowiedzi (poprawną odpowiedź oznaczono gwiazdką). Wartości w tabeli nie zawsze sumują się do 100, co wynika z tego, że zestawienie nie uwzględnia osób, które nie udzieliły odpowiedzi lub zaznaczyły więcej niż jedną możliwość, a także z tego, że wyniki zostały zaokrąglone. Po drugie każde zadanie ilustrowane jest wykresem, który pokazuje, jak popularne były poszczególne odpowiedzi (oś pionowa) wśród uczniów o różnym poziomie umiejętności mierzonych tym arkuszem (oś pozioma).

Odwołujemy się jeszcze do dwóch typów zestawień – średnich wyników danego zadania w poszczególnych szkołach oraz wyników ankiety przeprowadzonej wśród uczniów piszących test, która dotyczyła subiektywnej oceny trudności poszczególnych zadań.

Zadanie 1.

Uczeń przeczytał w ciągu tygodnia książkę liczącą 420 stron.

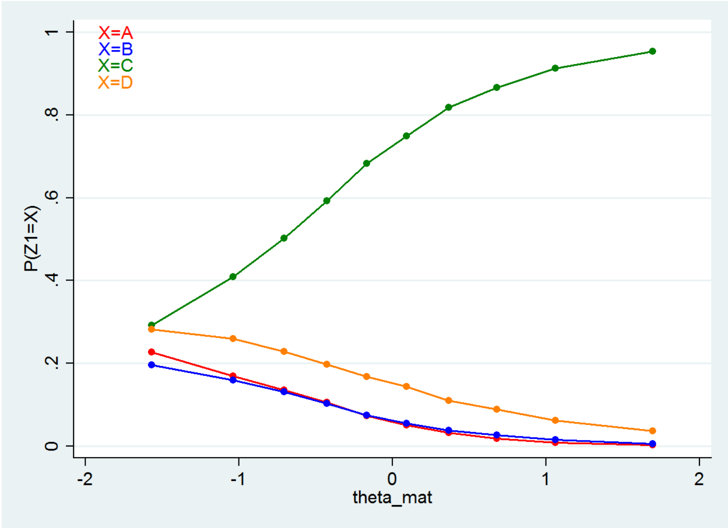
Dzień	Liczba przeczytanych stron	Czas czytania
1.	50	1 h 40 min
2.	70	2 h
3.	90	2 h 20 min
4.	30	30 min
5.	70	2 h 10 min
6.	80	2 h 30 min
7.	30	30 min

Na podstawie informacji zawartych w powyższej tabeli wybierz zdanie prawdziwe.

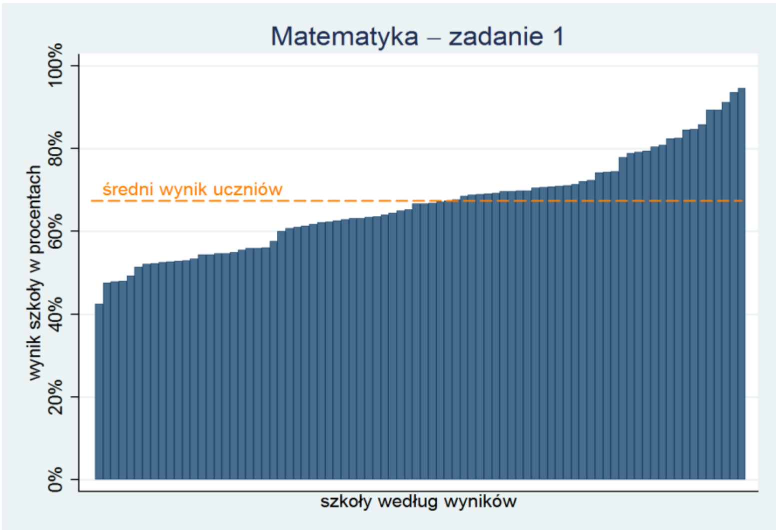
A. Pierwszego dnia uczeń przeczytał ponad 20% całej książki.
B. Uczeń czytał średnio 50 stron dziennie.
C. Piątego dnia uczeń przeczytał $\frac{1}{6}$ całej książki.
D. Przeczytanie pierwszej połowy książki zajęło uczniowi mniej czasu niż przeczytanie drugiej połowy.

odpowiedź	procent wybierających
A	8
B	8
C	67*
D	16

Zadanie wymagało od ucznia sprawdzenia wszystkich (albo niemal wszystkich) stwierdzeń podanych w proponowanych odpowiedziach. W każdym wypadku wiązało się to z wykonaniem prostych rachunków, które można było wykonać w pamięci.



Z wykresu ilustrującego wybory odpowiedzi wynika, że poprawna odpowiedź była wybierana z największym prawdopodobieństwem nawet wśród słabszych uczniów. Jednak w najsłabszej grupie wszystkie odpowiedzi wskazywane były z prawie takim samym prawdopodobieństwem (bliskim 0,25), co sugerować może losowy wybór odpowiedzi w tej grupie uczniów. Warto również zauważyć, że niezależnie od poziomu umiejętności uczniów, niepoprawna odpowiedź D była wybierana znacznie częściej niż pozostałe błędne odpowiedzi A i B.



W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 43% uczniów, a w najlepszej 95%.

Zadanie 2.

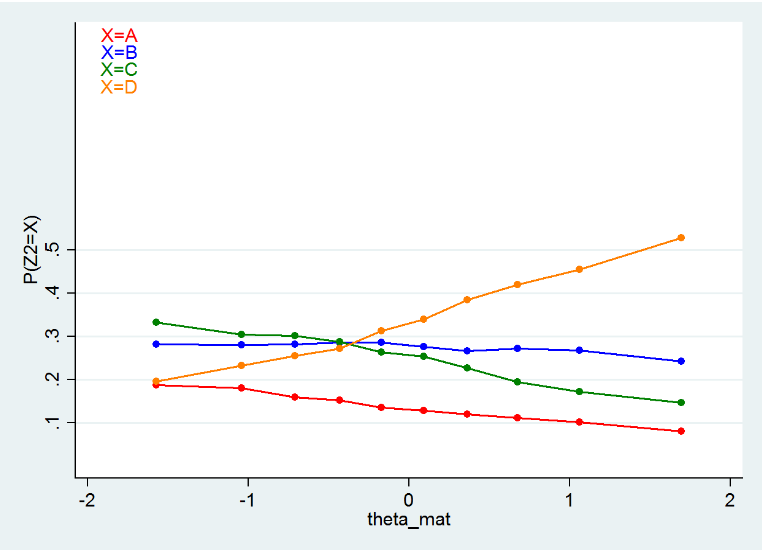
Do zestawu liczb: 1, 6, 8, 13, 13 dopisano jeszcze jedną liczbę. Mediana powiększonego zestawu wynosi 7.

Którą z poniższych liczb dopisano? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

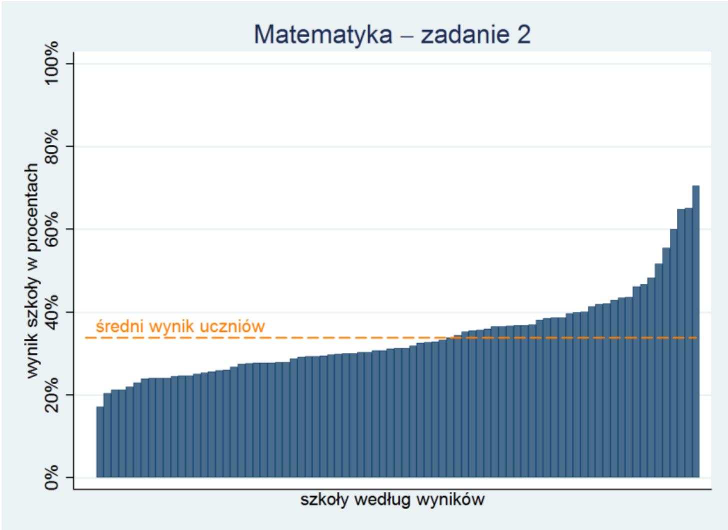
A. 9 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 6

odpowiedź	procent wybierających
A	14
B	27
C	25
D	34*

Zadanie wymagało od ucznia dobrego rozumienia pojęcia mediany, albo – przy innej strategii rozwiązania – wprawy w liczeniu mediany dla znanego zestawu danych. Wyniki mogą być zaburzone tym, że nie we wszystkich szkołach w momencie przeprowadzania testu zrealizowano już tematy związane z medianą. U tej części uczniów, którzy tego tematu nie omawiali powodować to mogło losowy wybór odpowiedzi. Wskazuje na to fakt, że trzy odpowiedzi cieszyły się podobną popularnością (poprawna D oraz dwie błędne – B i C)



Na przypadkowy wybór odpowiedzi przez znaczną grupę uczniów wskazywać też może powyższy wykres, na którym widać, że błędne odpowiedzi wybierane były ze sporym prawdopodobieństwem zarówno w grupie uczniów słabych, jak średnich i dobrych. Rosnące wraz z poziomem umiejętności uczniów prawdopodobieństwo wyboru poprawnej odpowiedzi wskazuje, że część uczniów już się zapoznała na lekcjach z pojęciem mediany i w tej grupie zadanie dobrze funkcjonuje. Taki przebieg wykresu pozwala przypuszczać, że uczniowie osiągnęliby lepsze wyniki, gdyby rozwiązywali je pod koniec roku szkolnego.



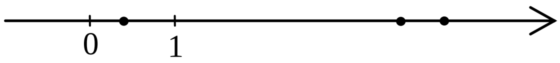
W jednej badanej szkole nikt nie rozwiązał poprawnie tego zadania. W następnych szkołach odsetki poprawnych rozwiązań wynoszą już 17%, 20% itd., a w najlepszej szkole 71%. Różnice między tymi wynikami są bardzo duże, ale – tak jak już wspomniano – mogą one wynikać z tego, że w niektórych szkołach materiał ten nie był jeszcze omawiany.

Zadanie 3.

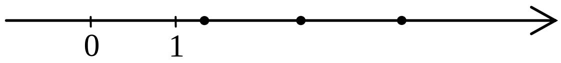
Na rysunkach przedstawiono osie liczbowe, a na każdej z nich kropkami zaznaczono trzy liczby.

Na którym rysunku jedna z tych liczb jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

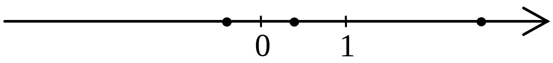
A.



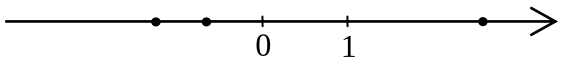
B.



C.

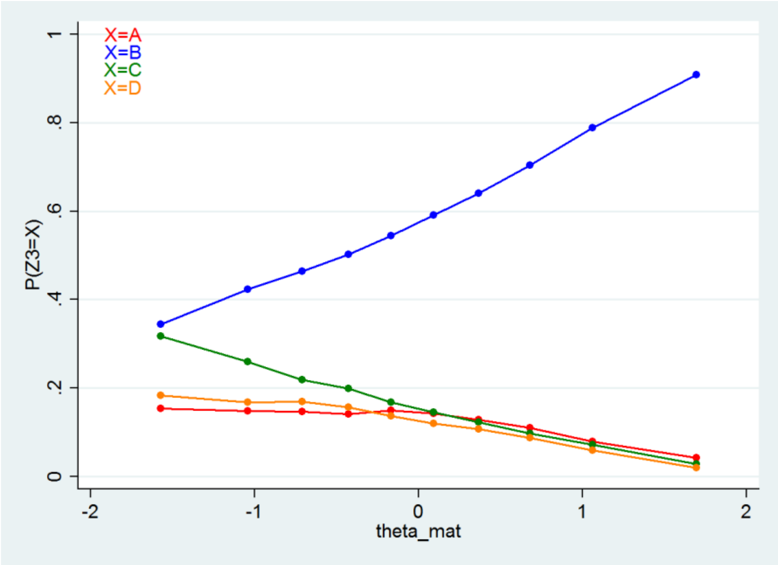


D.

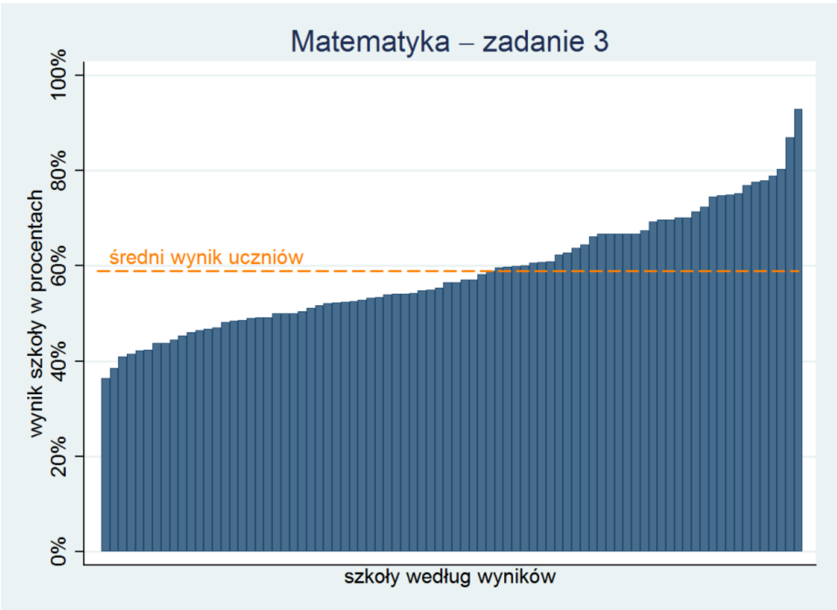


odpowiedź	procent wybierających
A	12
B	59*
C	16
D	12

Zadanie w nietypowy sposób sprawdza rozumienie własności średniej. Uczeń może je łatwo rozwiązać, jeśli zdaje sobie sprawę, że średnia arytmetyczna dwóch liczb leży dokładnie w środku między tymi liczbami. Może też dla każdej z proponowanych odpowiedzi oszacować zaznaczone liczby i ich średnią arytmetyczną. To, że blisko 60% uczniów poradziło sobie z tym zadaniem dobrze świadczy o ich umiejętności radzenia sobie z nieszablonowymi i niealgorytmicznymi problemami.



Warto zauważyć, że wśród słabszych uczniów dystraktor C był znacznie częściej wybierany niż dwa pozostałe. Być może stało się tak dlatego, że uczniowie ci nie dość dokładnie przeczytali treść zadania i potraktowali zaznaczoną na osi liczbę zero, jako średnią dwóch sąsiednich liczb zaznaczonych kropkami. Takiej pomyłki nie robili już uczniowie średni i lepsi.



W dwóch najsłabszych szkołach zadanie rozwiązało poprawnie zaledwie 36% uczniów i 38% uczniów, a w dwóch najlepszych 87% i 93%. Pozostałe wyniki mieszczą się między 40% a 80%.

Zadanie 4.

W tabeli zapisano cztery liczby.

I	$(0,2)^{10}$
II	$(2,5)^{-5}$
III	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3$
IV	$2^5 \cdot 5^{-1}$

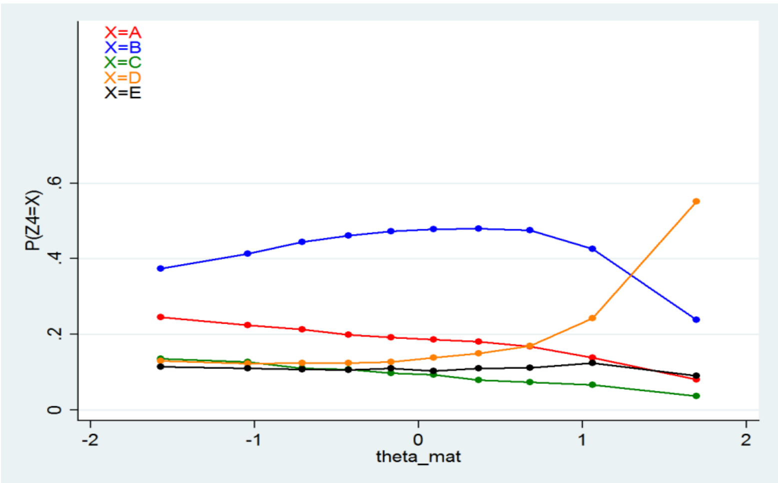
Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(0,4)^5$ jest równa liczbom

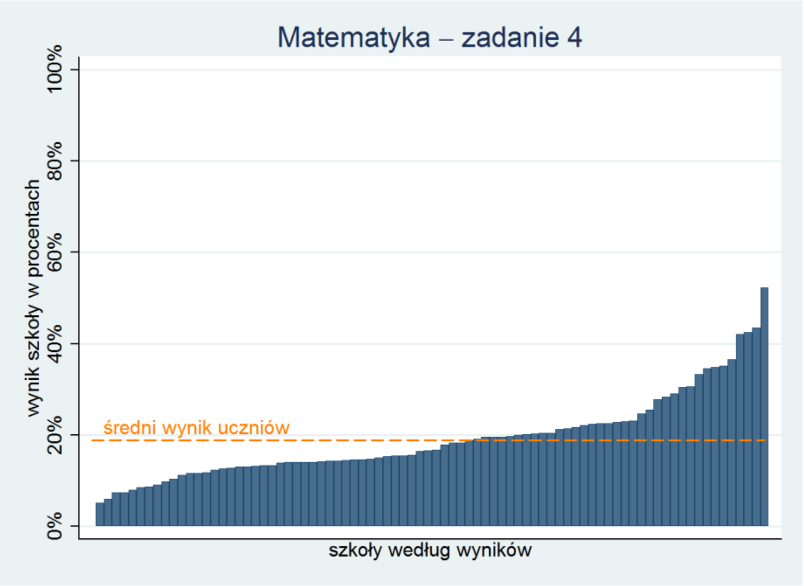
A. I i II
B. I i III
C. II i IV
D. II i III
E. III i IV

odpowiedź	procent wybierających
A	18
B	43
C	9
D	19*
E	11

Aby rozwiązać to zadanie uczniowie musieli wykonać dość proste rachunki na potęgach. Jak widać z rozkładu wyboru odpowiedzi, najczęściej wybierana była błędna odpowiedź B, a inna błędna odpowiedź (A) była niemal tak samo często wybierana jak odpowiedź poprawna. Wspólne dla tych dwóch błędnych odpowiedzi jest wskazanie liczby I. Takie wybory pokazują, że ponad 60% uczniów popełniło ten sam błąd rachunkowy: uznali, że liczba $(0,2)^{10}$ jest równa $(0,4)^5$. Błąd ten może paradoksalnie wynikać z tego, że rachunek był łatwy i znaczna część uczniów wykonywała go w pamięci, błędnie przyjmując, że skoro $2^2 = 4$, to również $0,2^2 = 0,4$, co oczywiście jest nieprawdą.



Co ciekawe, z powyższych wykresów wynika, że ten problem dotyczy nawet bardzo dobrych uczniów (theta = 1). Tylko najlepsi uczniowie (theta > 1,5) poradzili sobie z tym zadaniem, ale nawet oni wskazywali poprawną odpowiedź z prawdopodobieństwem mniejszym od 0,5 lub niewiele przekraczającym tę wartość.



Wyniki szkół mieszczą się pomiędzy 5% a 45%. Tylko jedna, najlepsza szkoła uzyskała wynik równy 52%, czyli prawie trzykrotnie wyższy niż średnio w całej próbie.

Zadanie 5.

Które zdanie jest <u>fałszywe</u>? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. Suma kolejnych dwóch liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

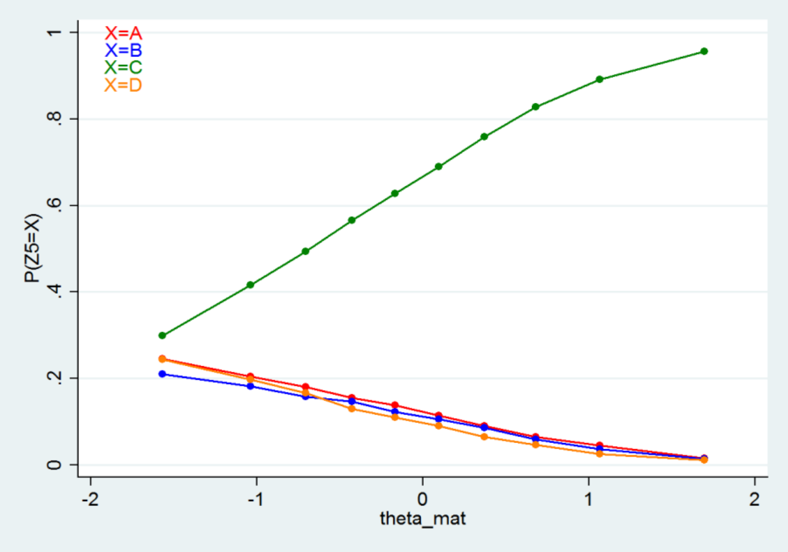
B. Iloczyn kolejnych dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą.

C. Różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

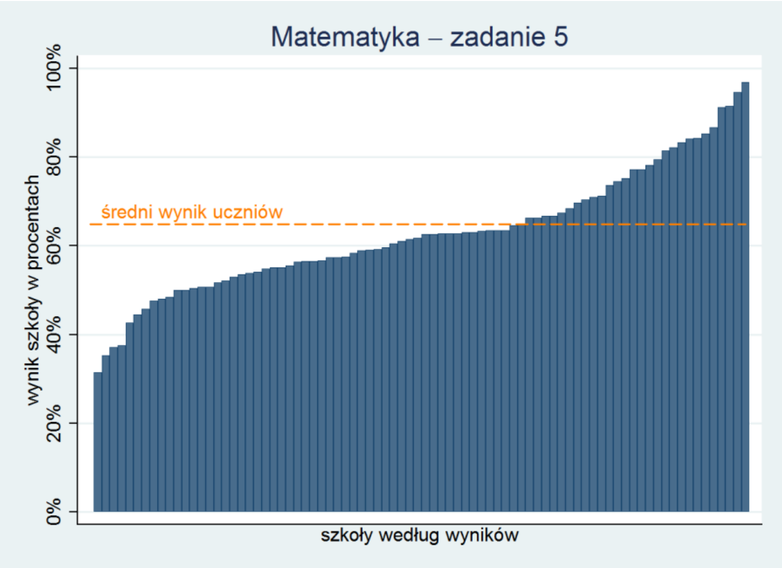
D. Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

odpowiedź	procent wybierających
A	13
B	11
C	65*
D	11

Uczniowie, którzy dobrze rozwiązali to zadanie najprawdopodobniej szukali zdania fałszywego, sprawdzając na przykładach prawdziwość podanych zdań. Okazało się to skuteczną metodą rozwiązania.



Powyższy wykres pokazuje, że poprawna odpowiedź była najczęściej wskazywaną w każdej grupie uczniów – zarówno w grupie najsłabszych, jak i najlepszych. Jednak wyniki najsłabszych uczniów są zbliżone do wyników osiąganych przy losowym wyborze odpowiedzi (każda z odpowiedzi wskazywana jest z prawdopodobieństwem niewiele różniącym się od 0,25)



W najsłabszej szkole rozwiązało zadanie poprawnie ponad dwukrotnie mniej uczniów – 31%, niż wyniosła średnia (65%), a w najlepszej prawie wszyscy – 97% uczniów.

Zadanie 6.

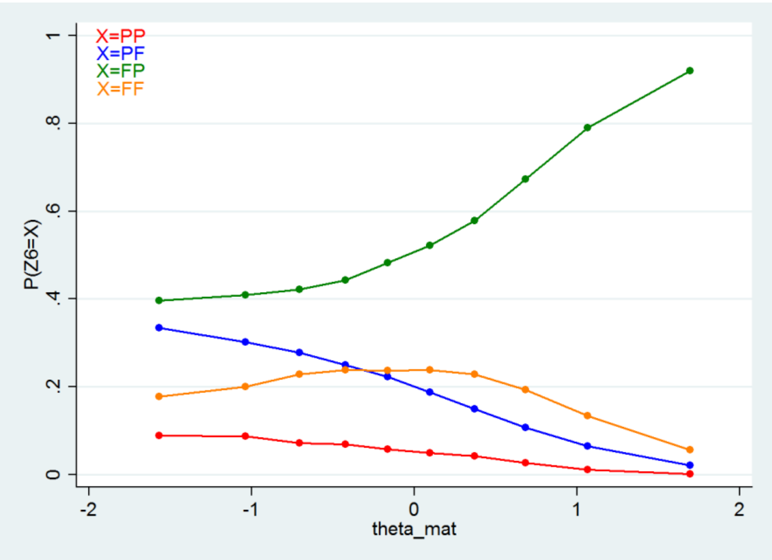
Ania i Tomek mają razem 14 lat. Dwa lata temu Tomek był 4 razy starszy od Ani.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

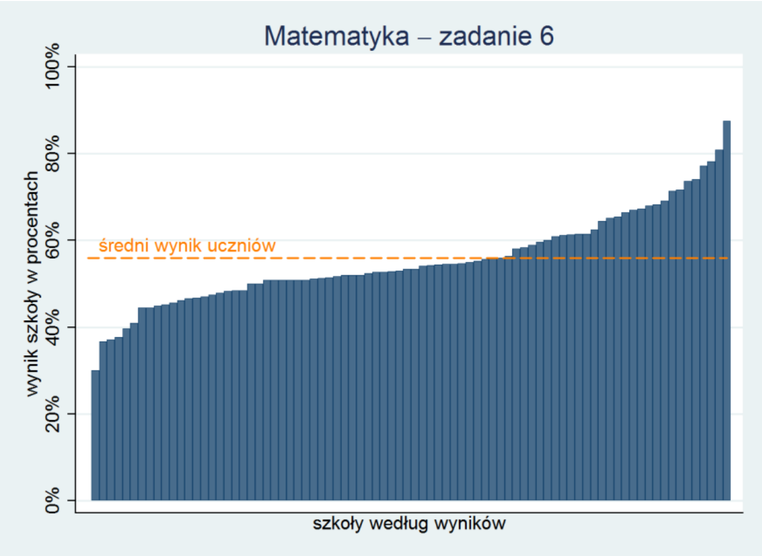
Ania jest dwa razy młodsza od Tomka.	**P**	**F**
Tomek jest o 6 lat starszy od Ani.	**P**	**F**

odpowiedź	procent wybierających
PP	5
PF	19
FP	56*
FF	19

Aby w tym zadaniu wskazać poprawne odpowiedzi, uczniowie musieli rozwiązać zadanie tekstowe. Większość z nich uczyniła to zapewne za pomocą równania lub układu równań. Być może część uczniów poradziła sobie bez równań, znajdując wiek Ani i Tomka metodą prób i błędów lub za pomocą rozumowania wykorzystującego dane liczbowe. Nie można zatem jednoznacznie wskazać jakiego typu błędy popełniali uczniowie, którzy wybrali niepoprawne odpowiedzi.



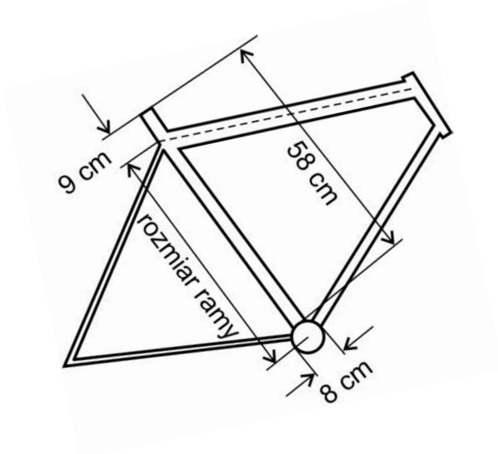
Bez względu na poziom umiejętności uczniów poprawna odpowiedź była najczęściej wskazywaną. Jeśli uczeń popełnił błąd w rachunkach (np. przy układaniu lub rozwiązywaniu układu równań) to źle obliczył wiek dzieci i wybierał odpowiedź FF. Na wykresie widać, że tak było najczęściej dla uczniów o umiejętnościach przeciętnych i wyższych niż przeciętne (theta ≥ 0). Jeśli natomiast słabsi uczniowie wskazywali odpowiedź błędną, to najczęściej była to odpowiedź PF. Prawdopodobnie rozumowali oni błędnie tak: skoro dwa lata temu Tomek był cztery razy starszy od Ani, to teraz będzie dwa razy starszy. Oznaczałoby to, że ci uczniowie nie tylko nie rozumieją związków między wielkościami podanymi w zadaniu, ale też nie potrafią skorzystać ze wszystkich podanych w nim informacji.



W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 30% uczniów, a w najlepszej 88%.

Zadanie 7.

Rozmiar ramy roweru to długość fragmentu rury pod siodełkiem mierzona tak, jak przedstawiono na rysunku – od środka miejsca, w którym obracają się pedały do środka rury łączącej siodełko z kierownicą.

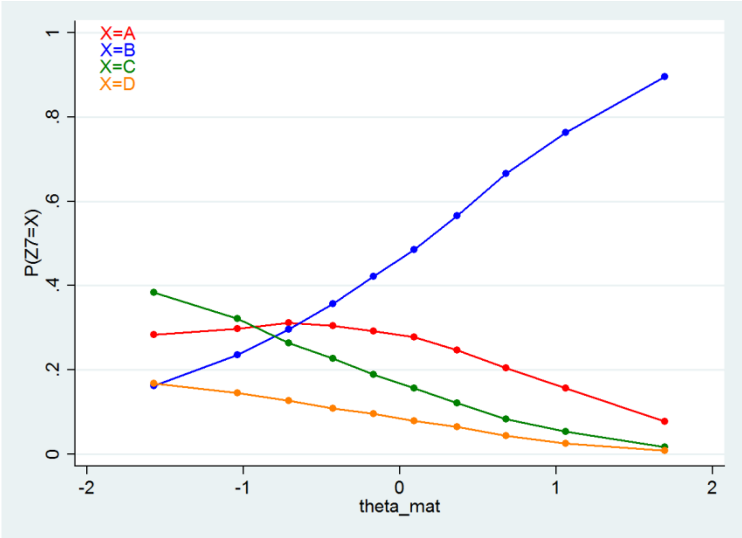


Jaki jest rozmiar ramy, której niektóre wymiary przedstawiono na rysunku? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

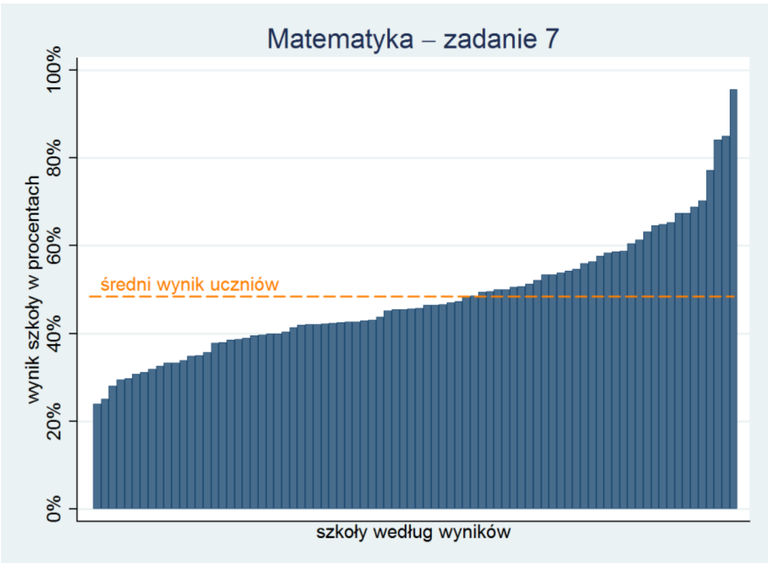
A. 49 cm **B.** 53 cm **C.** 58 cm **D.** 59 cm

odpowiedź	procent wybierających
A	25
B	48*
C	18
D	9

Do rozwiązania zadania wystarczy umiejętność odczytywania informacji z rysunku oraz najprostsze umiejętności rachunkowe nie wykraczające poza wymagania szkoły podstawowej. Uczniowie, którzy wybrali błędną odpowiedź A prawdopodobnie wykonali odejmowanie 58 cm – 9 cm, a więc nie dostrzegli na rysunku jednej z istotnych informacji. Uczniowie wybierający odpowiedź C nie wzięli pod uwagę dwóch ważnych informacji podanych na rysunku.



Wśród najsłabszych uczniów poprawna odpowiedź była najrzadziej wskazywana, a najczęściej wskazywaną była odpowiedź C, czyli odpowiedź wynikająca z pomijania więcej niż jednej z podanych informacji. Dopiero poczynając od poziomu umiejętności odpowiadającemu wartości theta = – 0,5 poprawna odpowiedź była najczęściej wskazywaną. Warto porównać wyniki uczniów w tym zadaniu z bardzo dobrymi wynikami osiągniętymi przez nich w zadaniach 10. i 11. (w tych zadaniach uczniowie analizowali informacje podane na wykresach).



W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 24% uczniów (dwukrotnie mniej niż wyniosła średnia), a w najlepszej – prawie wszyscy uczniowie (96%). Jest to jedno z zadań o największym zróżnicowaniu wyników.

Informacja do zadań 8. i 9.

Aby dobrać rozmiar ramy roweru do wzrostu użytkownika, można posłużyć się następującą regułą: *rozmiar odpowiedniej ramy otrzymamy, gdy od 40% wzrostu użytkownika* (*w cm*) *odejmiemy 15 cm.*

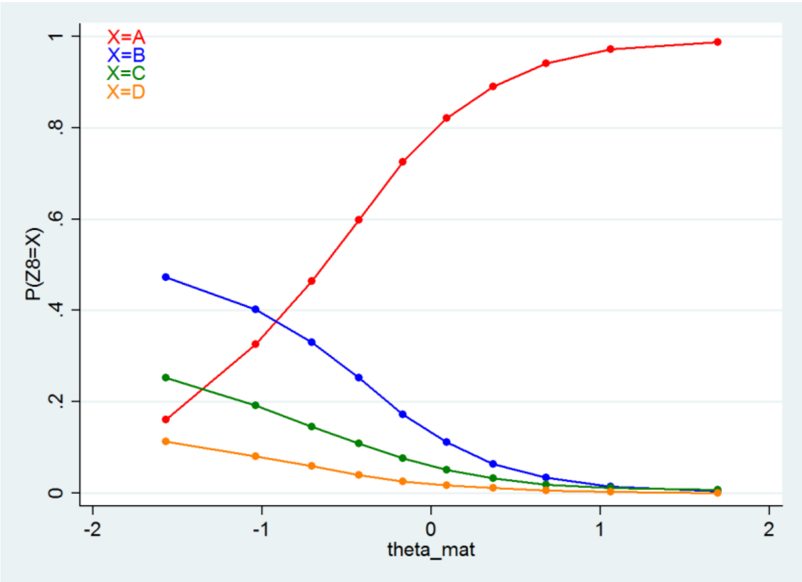
Zadanie 8.

Jaki rozmiar powinna mieć, według tej reguły, rama dla rowerzysty o wzroście 175 cm? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

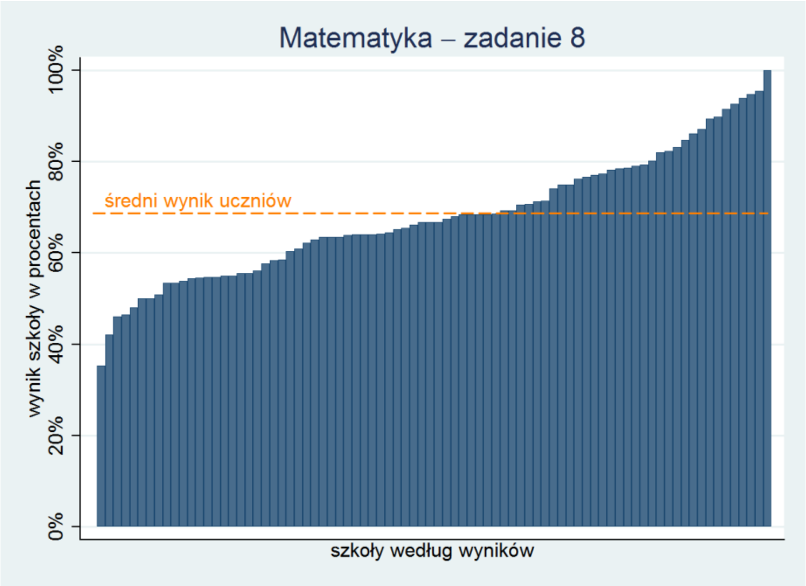
A. 55 cm **B.** 64 cm **C.** 90 cm **D.** 96 cm

odpowiedź	procent wybierających
A	69*
B	19
C	9
D	4

Aby rozwiązać zadanie uczniowie musieli umieć zastosować osadzoną w kontekście praktycznym procedurę obliczeń podaną opisem słownym. Poradziło sobie z tym prawie 70% uczniów. Ci, którzy sobie nie poradzili, najczęściej wybierali odpowiedź B. Oznacza to, że w złej kolejności wykonali obliczenia opisane w podanej procedurze (najpierw odjęli 15 cm, a potem obliczyli 40% otrzymanej wielkości). Uczniowie wybierający błędną odpowiedź C najprawdopodobniej odjęli od 175 cm nie tylko 15 cm jak przewidywała procedura, ale także 40% ze 175 cm.



Z powyższego wykresu wynika, że dla najsłabszych uczniów prawdopodobieństwo wybrania prawidłowej odpowiedzi było niewiele wyższe niż 0,1. Natomiast już uczniowie średni zdecydowanie częściej wybierali poprawną odpowiedź niż którąkolwiek błędną.



W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało 35% (dwukrotnie mniej niż wyniosła średnia) a w najlepszej rozwiązali uczniowie (100%)

Zadanie 9.

Niech *r* oznacza rozmiar ramy (w cm), *w* – wzrost użytkownika (też w cm).

Którym wzorem <u>nie można</u> wyrazić opisanej wyżej reguły dobierania rozmiaru ramy? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. $r = \frac{2}{5}w - 15$

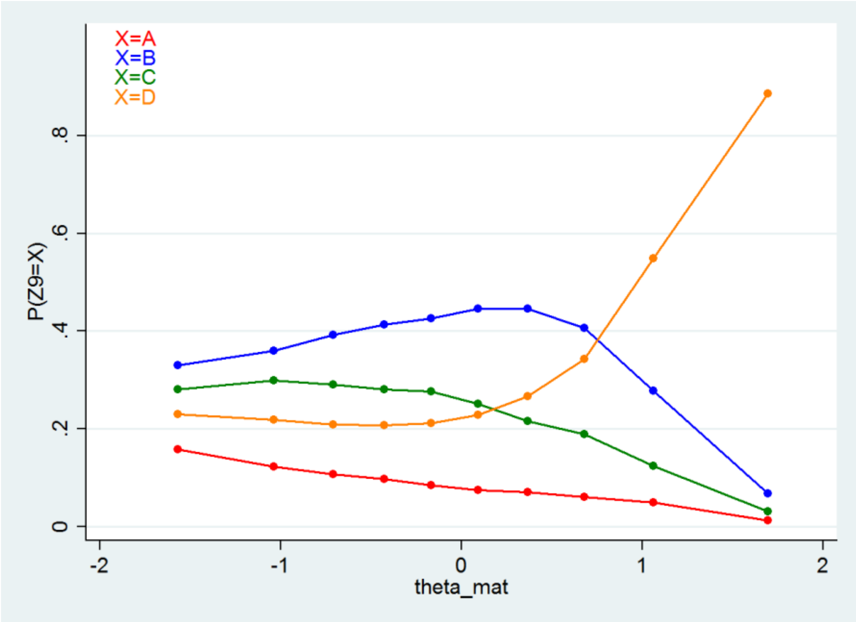
B. $r = \frac{2}{5}(w - 37{,}5)$

C. $r = \frac{2w - 75}{5}$

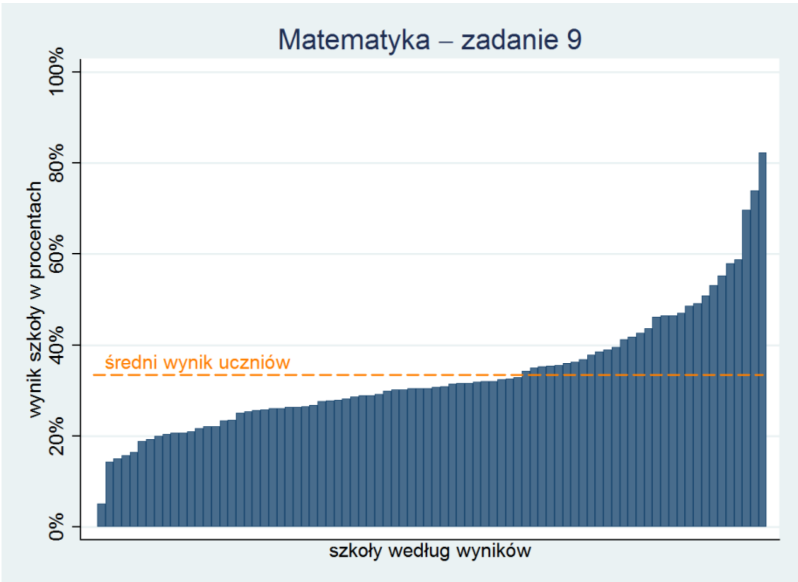
D. $r = 0{,}4(w - 15)$

odpowiedź	procent wybierających
A	8
B	36
C	22
D	33*

Aby rozwiązać to zadanie uczeń musi umieć sprawnie przekształcać wyrażenia algebraiczne. Okazało się, że taką sprawnością nie wykazało się prawie 70% uczniów. Bardzo możliwe, że uczniowie ci nawet nie starali się przekształcać podanych wyrażeń, a tylko próbowali rozpoznać, czy wyrażenia zawierają liczby występujące w procedurze opisanej w tekście zadania. Na taką interpretacje wskazuje fakt, że najczęściej wskazywaną była odpowiedź B, a sporo wskazań miała też odpowiedź C. W wyrażeniach podanych w obu tych błędnych odpowiedziach nie widać na pierwszy rzut oka liczby 15 występującej procedurze opisanej słowami w tekście zadania.



Zadanie okazało się trudne nawet dla uczniów o umiejętnościach nieco wyższych niż przeciętne. Tylko najlepsi uczniowie (theta > 1) wskazywali poprawną odpowiedź z prawdopodobieństwem większym od 0,5. Ciekawe, że częstość wskazań błędnej odpowiedzi B rosła początkowo wraz ze wzrostem umiejętności uczniów aż do theta ≈ 0,5. Wzrost odbywał się głównie kosztem częstości wskazań pozostałych błędnych odpowiedzi A i C.

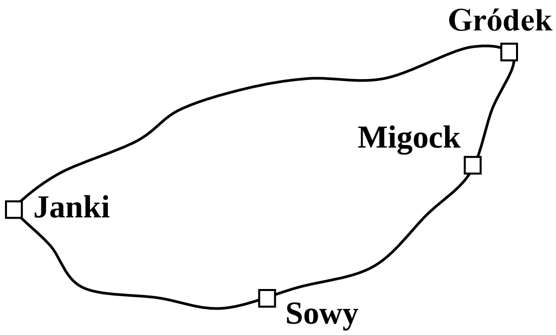


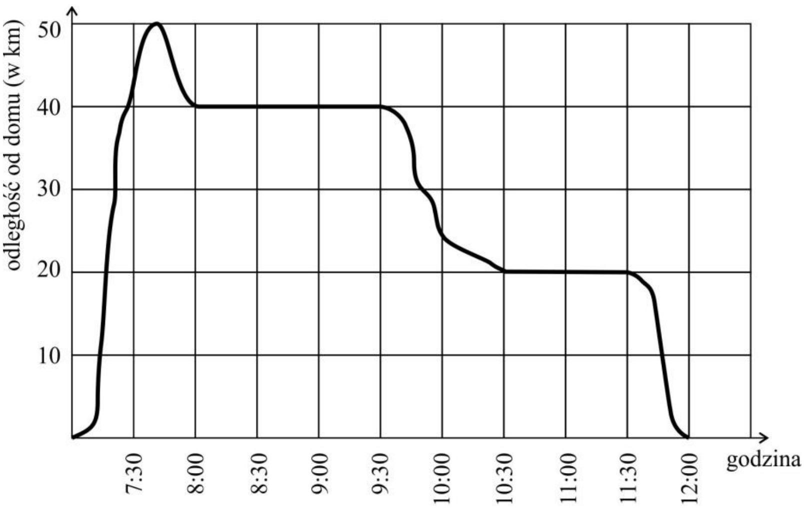
W najsłabszej szkole zadanie potrafiło poprawnie rozwiązać zaledwie 5% uczniów. W pozostałych odsetek ten był zawarty w przedziale między 14% a 60%. W trzech najlepszych szkołach odsetek odpowiedzi poprawnych wynosił odpowiednio: 70%, 74% i 82%.

Jest to jedno z zadań o największym zróżnicowaniu wyników.

Informacje do zadań 10. i 11.

W poniedziałek pan Ryszard, mieszkaniec wsi Janki, odwiózł córkę do szkoły w Gródku, a następnie pojechał na kontrolę swoich sklepów w Sowach i w Migocku.
Na schematycznej mapce przedstawiono drogi łączące te miejscowości, a na wykresie – jak zmieniała się w czasie tej podróży odległość (mierzona w linii prostej) pana Ryszarda od domu.





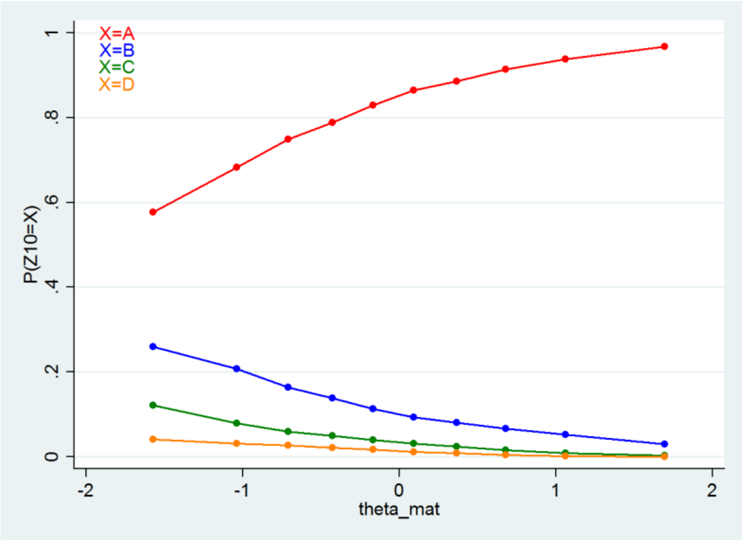
Zadanie 10.

Jaka jest odległość (w linii prostej) między Jankami a Gródkiem? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

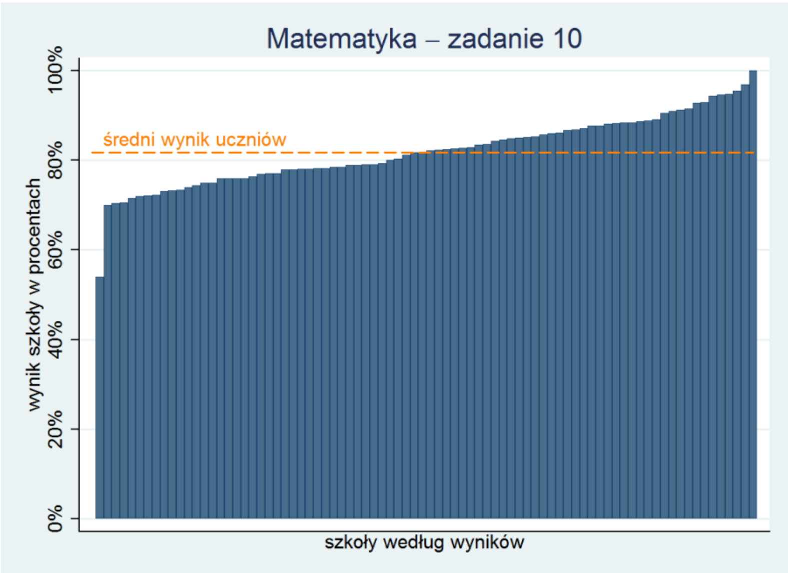
A. 50 km **B.** 40 km **C.** 20 km **D.** 10 km

odpowiedź	procent wybierających
A	82*
B	12
C	4
D	2

W tym zadaniu uczeń musiał wykazać się umiejętnością analizowania informacji podanych na trzy sposoby: opisanej słowami, podanej za pomocą wykresu oraz przedstawionej na mapie. Okazało się, że uczniowie świetnie sobie z tym radzą. Zadanie okazało się najłatwiejsze w całym zestawie.



Powyższy wykres pokazuje, że dobrze sobie z nim poradzili nawet uczniowie o najniższych umiejętnościach (theta = – 1,5). Prawdopodobieństwo wskazania prawidłowej odpowiedzi nawet w tej grupie wynosiło około 0,6.



W jednej wyraźnie słabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 54% uczniów. We wszystkich pozostałych szkołach było co najmniej 70% rozwiązań poprawnych, a w najlepszej szkole nawet 100%. Jest to jedno z zadań o najmniejszym zróżnicowaniu wyników.

Zadanie 11.

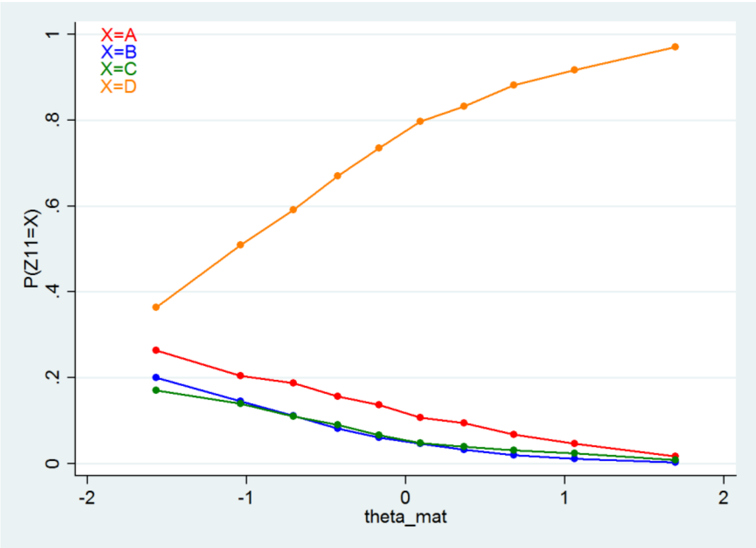
Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

Z podanych informacji wynika, że pan Ryszard

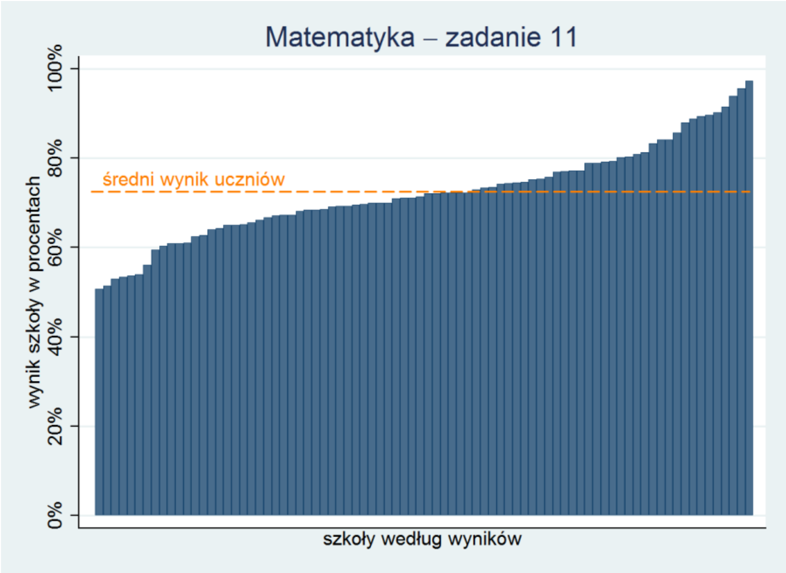
A. najpierw kontrolował sklep w Sowach.
B. między Sowami a Migockiem zatrzymał się na 15 minut.
C. wrócił do domu po 4 godzinach.
D. kontrolował sklep w Sowach co najwyżej godzinę.

odpowiedź	procent wybierających
A	13
B	7
C	7
D	73*

Zadanie sprawdzało podobne umiejętności jak zadanie poprzednie. Jednak tym razem informacja konieczna do rozwiązania była na tyle trudniejsza do odczytania, że odsetek uczniów, którzy potrafili rozwiązać zadanie spadł o niemal 10 punktów procentowych.



Podobnie jak w poprzednio, wykres pokazuje, że z zadaniem tym dobrze sobie poradzili nawet uczniowie o najniższych umiejętnościach (theta = – 1,5). Prawdopodobieństwo wskazania prawidłowej odpowiedzi nawet w tej grupie było niewiele niższe niż 0,4 i nawet w tej grupie odpowiedź poprawna była częściej wskazywana, niż którakolwiek z odpowiedzi błędnych.



W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 51% uczniów, a w najlepszej 97%.

Zadanie 12.

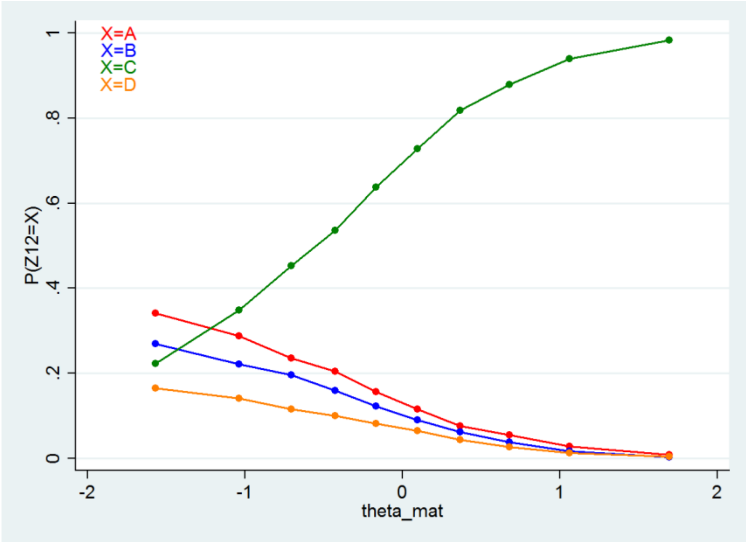
Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

Równość $\frac{3}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ będzie prawdziwa, jeśli w miejsce *x* i *y* zostaną wpisane liczby

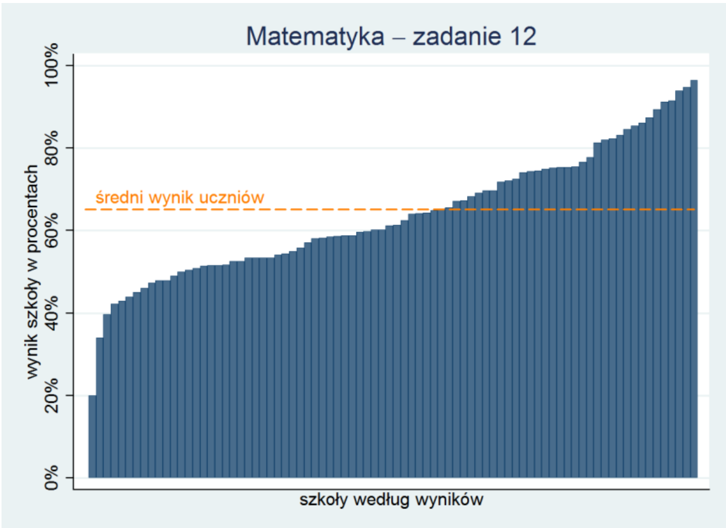
A. 5 i 2 **B.** 6 i 4 **C.** 10 i 2 **D.** 10 i 6

odpowiedź	procent wybierających
A	15
B	12
C	65*
D	8

Aby rozwiązać to zadanie uczeń musi umieć podstawić proponowane liczby do równania i dodać ułamki o różnych mianownikach.



Wykres pokazuje, że tylko najsłabsi uczniowie częściej wybierali inne odpowiedzi niż poprawną C.



W tym zadaniu dwie szkoły miały wyraźnie najniższe wyniki: 20% i 34%. W pozostałych szkołach odsetki poprawnych odpowiedzi są wyższe niż 40% i dochodzą aż do 96% w najlepszej szkole.

Zadanie 13.

Firma składa się z dwóch oddziałów. W marcu zysk pierwszego oddziału był równy 30 tys. zł, a drugiego oddziału 24 tys. zł. W kwietniu zysk pierwszego oddziału zmniejszył się o 10% w stosunku do marca, ale zysk całej firmy był taki sam jak w marcu.
O ile procent w stosunku do poprzedniego miesiąca zwiększył się w kwietniu zysk drugiego oddziału? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 10% **B.** 12,5 % **C.** 8% **D.** 14,5%

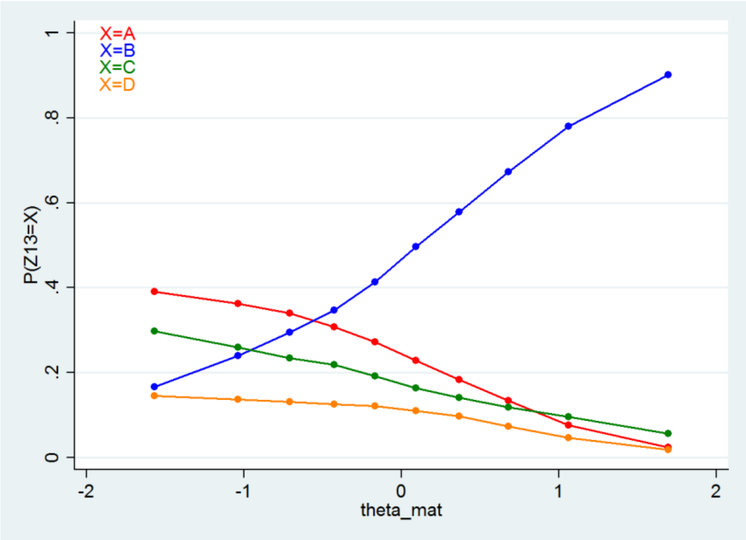
odpowiedź	procent wybierających
A	23
B	49*
C	18
D	10

Aby rozwiązać to zadanie uczeń musi umieć posługiwać się procentami – obliczać procent danej liczby oraz obliczać, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba. Zadanie to można rozwiązać dwiema drogami – dłuższą, w której sumuje się zyski z poszczególnych oddziałów lub krótszą, w której wystarczy zauważyć, że zysk drugiego oddziału zwiększył się o taką samą kwotę, o jaką zmalał zysk pierwszego oddziału.

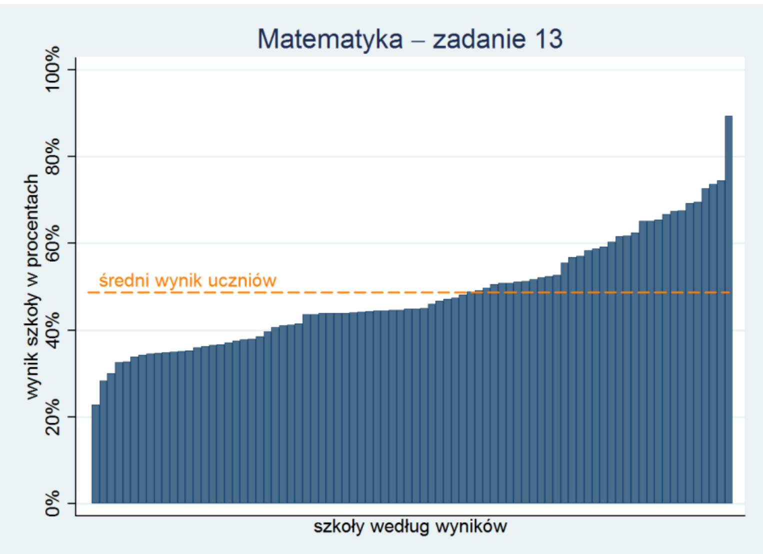
Wybór odpowiedzi A. świadczy o tym, że uczeń nie rozumie, że zmiana o tę samą kwotę nie oznacza zmiany o ten sam procent – zapomina, że wielkość procentowa zależy od liczby do której się ją odnosi, czyli 3 tys. jest innym procentem z liczby 30 tys., a innym z liczby 24 tys.

Odpowiedź C. prawdopodobnie bierze się z rachunku: 3 tys : 24 tys = 1/8 i błędnego utożsamienia ułamka 1/8 z wielkością 8%.

Odpowiedź D. wybrało 10% uczniów. Niestety nie widzimy żadnego rozumowania, które mogło doprowadzić do takiej odpowiedzi. Może są to uczniowie, którzy wybierali odpowiedź na chybił-trafił?



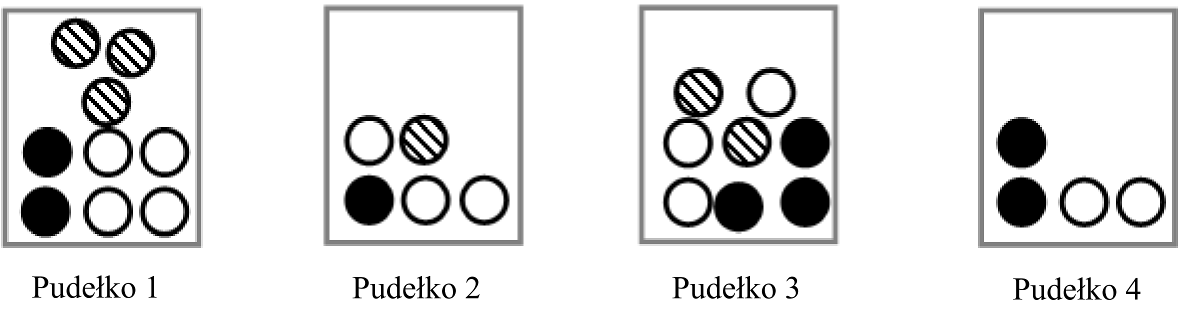
Z powyższego wykresu można odczytać, że wśród uczniów słabych większym powodzeniem niż odpowiedź poprawna, cieszyły się odpowiedzi A i C. Dopiero począwszy od poziomu umiejętności -0,5 odchylenia standardowego poprawna odpowiedź B jest wybierana najczęściej.



W tym zadaniu wynik większości szkół mieści się w granicach 25% – 75%. Tylko jedna, najlepsza szkoła ma wynik wyższy – równy 89%.

Zadanie 14.

Na rysunku przedstawiono liczbę i rodzaj kul umieszczonych w każdym z czterech pudełek. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę.



Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

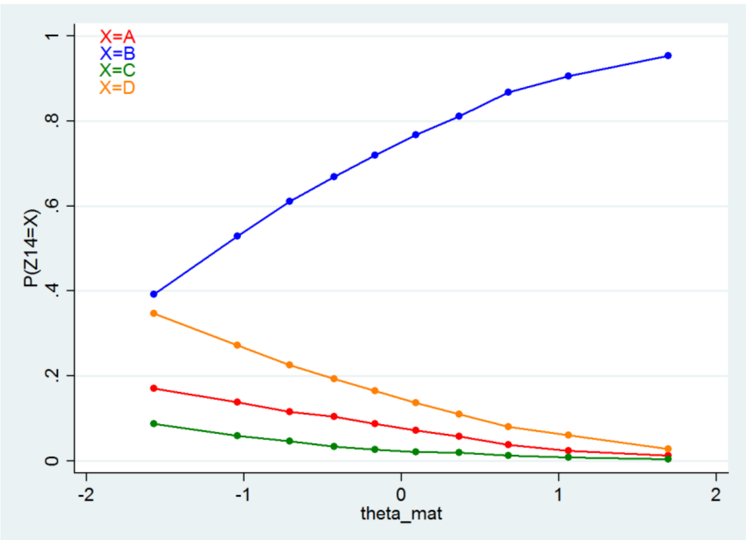
Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli jest największe, gdy kulę losujemy z pudełka

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

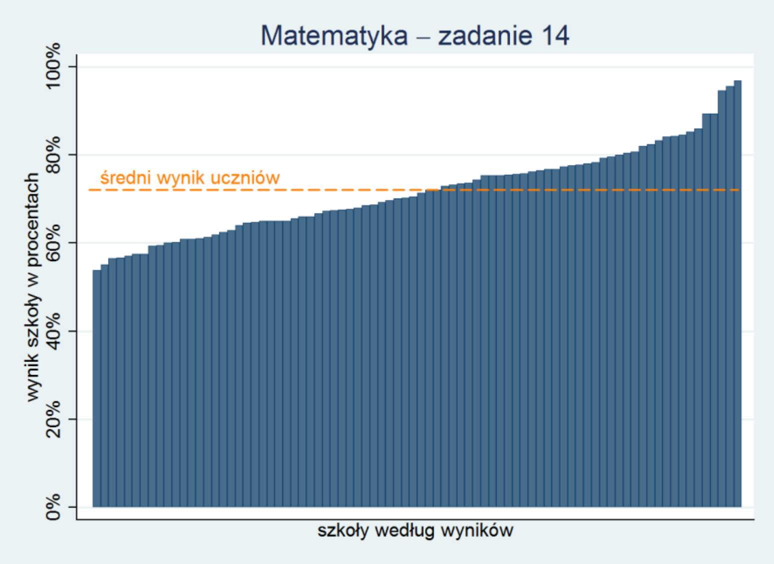
odpowiedź	procent wybierających
A	8
B	72*
C	3
D	16

Aby rozwiązać to zadanie, uczeń musi rozumieć pojęcie prawdopodobieństwa. Aby określić dla którego pudełka prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest największe nie musi nawet obliczać tych prawdopodobieństw i porównywać ułamków. Wystarczy, że zauważy, że tylko w pudełku 2. kul białych jest więcej niż wszystkich pozostałych łącznie, a zatem dla tego pudełka szansa wyciągnięcia kuli białej jest największa.

Jest to jedno z najłatwiejszych zadań w arkuszu.



Z powyższego wykresu widać, że na każdym poziomie umiejętności najwięcej uczniów wybiera poprawną odpowiedź B oraz że niezależnie od poziomu umiejętności tajemniczy dystraktor D jest najbardziej popularny.



W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 54% uczniów, a w najlepszej 97%. Jest to jedno z zadań o najmniej zróżnicowanych wynikach.

Zadanie 15.

Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

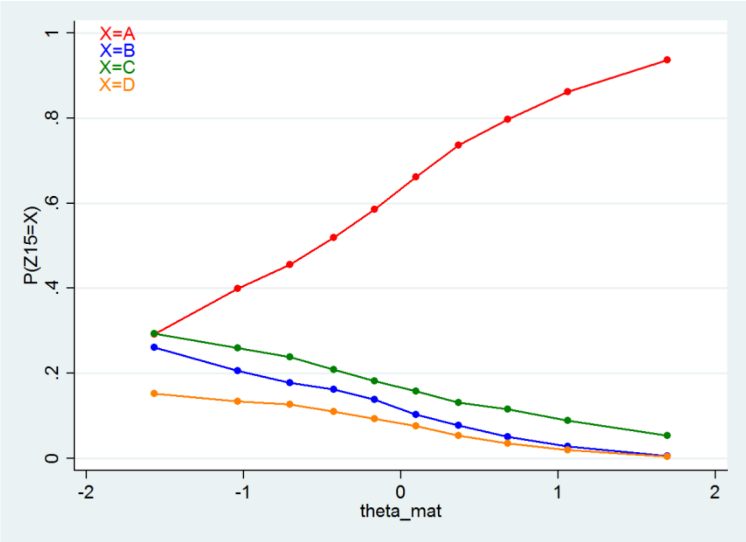
W równoległoboku o obwodzie 26 cm różnica długości dwóch sąsiednich boków jest równa 3 cm. Dłuższy bok tego równoległoboku jest równy

A. 8 cm   **B.** $6\frac{1}{4}$ cm   **C.** 5 cm   **D.** $3\frac{1}{4}$ cm

odpowiedź	procent wybierających
A	62*
B	12
C	17
D	12

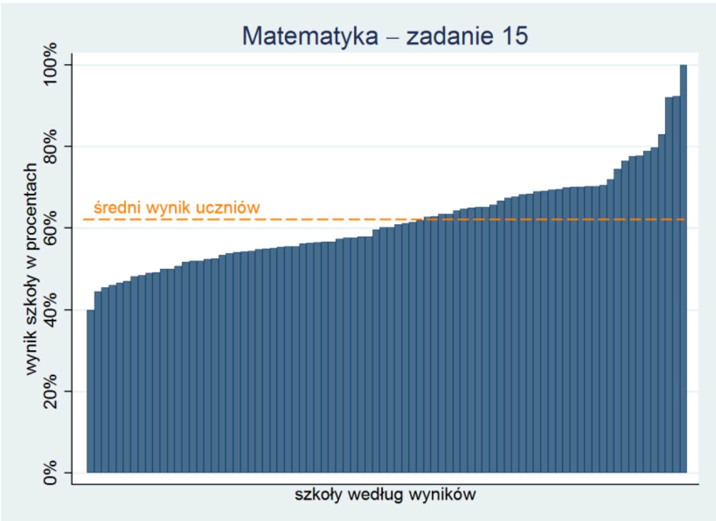
Jest to typowe zadanie tekstowe, które może być rozwiązane wieloma sposobami: uczeń może ułożyć układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi lub równanie z jedną niewiadomą i rozwiązać je. Może także rozwiązać zadanie w pamięci: skoro jeden bok jest dłuższy od drugiego o 3 cm, to jeśli z obu dłuższych boków odejmiemy po 3 cm to otrzymamy romb o obwodzie 20 cm. Zatem jego bok będzie równy 5 cm. Jest to zarazem krótszy bok wyjściowego równoległoboku. Stąd dłuższy bok jest równy 8 cm. Jeszcze inną metodą rozwiązania jest sprawdzenie, która z proponowanych odpowiedzi spełnia warunki zadania.

Można przypuszczać, że uczniowie, którzy wybrali odpowiedź C. (5 cm) poprawnie znaleźli długości boków równoległoboku, ale błędnie wybrali spośród proponowanych liczb długość krótszego, a nie dłuższego boku.



Wykres pokazuje, że nawet bardzo słabi uczniowie częściej wybierali poprawną odpowiedź A niż pozostałe. Jednakże omówiona powyżej błędna odpowiedź C jest częściej wybierana niż dwie inne błędne odpowiedzi – niezależnie od poziomu umiejętności uczniów.

Wykres pokazuje także, że zadanie funkcjonowało dobrze – wraz ze wzrostem umiejętności uczniów prawdopodobieństwo udzielenia błędnej odpowiedzi szybko malało, a prawdopodobieństwo udzielenia poprawnej odpowiedzi równie szybko rosło. Dla uczniów o średnim poziomie umiejętności (theta = 0) prawdopodobieństwo wybrania którejkolwiek błędnej odpowiedzi wynosiło mniej niż 0,2, a prawdopodobieństwo wybrania poprawnej odpowiedzi około 0,6. Dla uczniów najlepszych prawdopodobieństwo wyboru odpowiedzi B lub D jest bliskie 0, natomiast nadal niezerowe (równe 0,1) jest prawdopodobieństwo wyboru odpowiedzi C, co także świadczy o możliwości wyboru tego dystraktora przez nieuwagę.



W tym zadaniu wyniki większości szkół mieszczą się w granicach 40% - 83%. Trzy najlepsze szkoły osiągnęły wyniki równe: 92%, 92%, 100%.

Zadanie 16.

Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

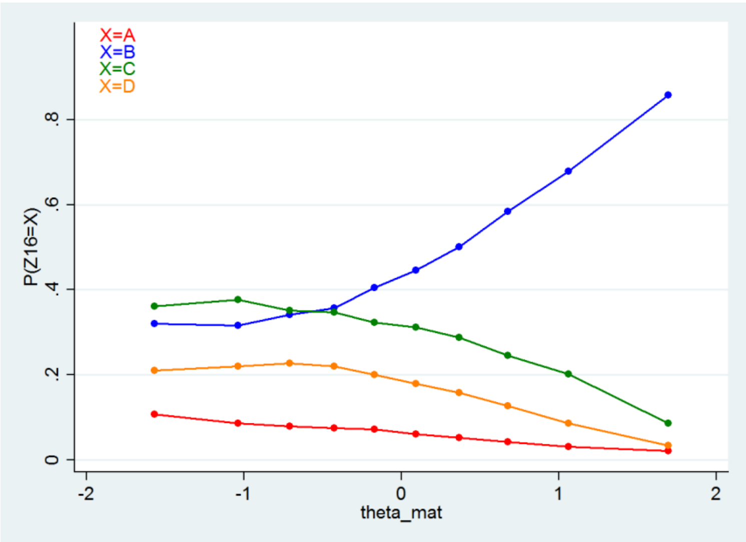
Pole trójkąta wynosi 4 cm^2. Pole trójkąta do niego podobnego jest równe 64 cm^2. Skala podobieństwa trójkąta większego do mniejszego jest równa

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 9

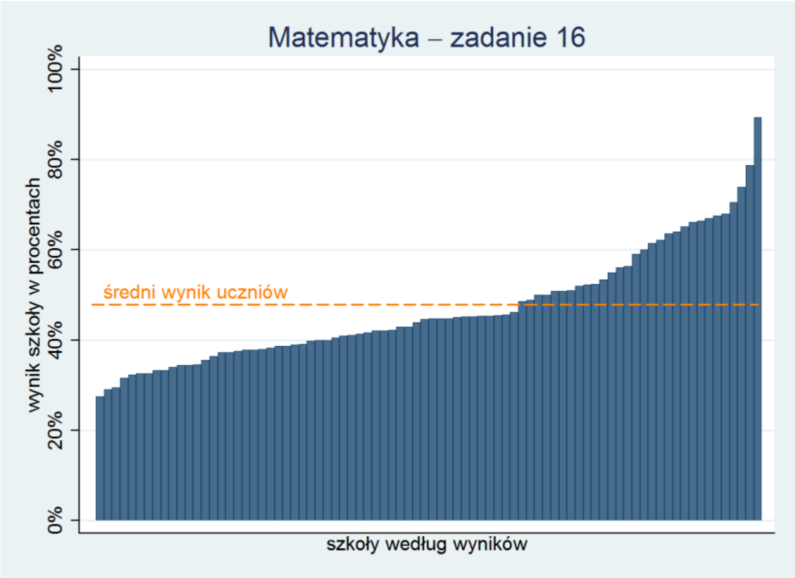
odpowiedź	procent wybierających
A	6
B	48*
C	29
D	17

Aby rozwiązać to zadanie uczeń musi znać pojęcie podobieństwa figur, oraz wiedzieć, jak zmienia się pole figur w zależności od skali podobieństwa tych figur.

Niestety nie potrafimy postawić żadnej hipotezy, jakie błędy uczniów stoją za wyborami niepoprawnych odpowiedzi. Z niektórych szkół otrzymywaliśmy sygnały, że temat podobieństwa trójkątów nie był jeszcze w III klasie zrealizowany. Ale jeśli to byłaby przyczyna wybierania błędnych odpowiedzi, otrzymalibyśmy bardziej równomierny rozkład wyborów dystraktorów. A tymczasem dystraktor A jest trzykrotnie rzadziej wybierany niż dystraktor D i prawie pięciokrotnie rzadziej niż dystraktor C.



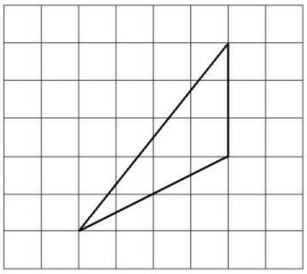
Z powyższego wykresu można odczytać, że na każdym poziomie umiejętności najmniej uczniów wybierało odpowiedź A. Można zobaczyć również, że błędna odpowiedź C była relatywnie często wybierana nawet przez uczniów o średnim i wyższym poziomie umiejętności. Nawet dla uczniów o najwyższym poziomie umiejętności (theta = 2) prawdopodobieństwo wyboru odpowiedzi C nadal było niezerowe i wynosiło 0,1.



W tym zadaniu wyniki prawie wszystkich szkół mieszczą się w granicach 28% - 70%. Cztery najlepsze szkoły osiągnęły wyniki równe: 71%, 74%, 79% i 89%.

Zadanie 17.

Na siatce kwadratowej narysowano trójkąt. Bok kwadratu siatki jest równy 1.



Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

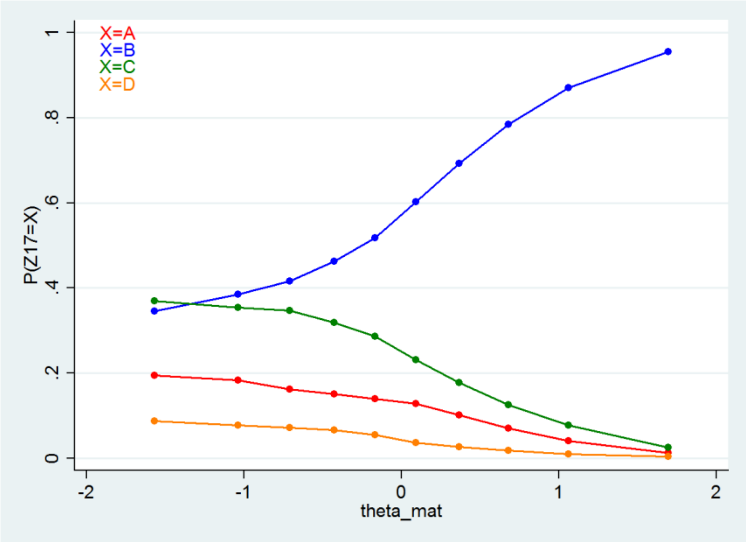
Pole narysowanego trójkąta jest równe

A. 3 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 18

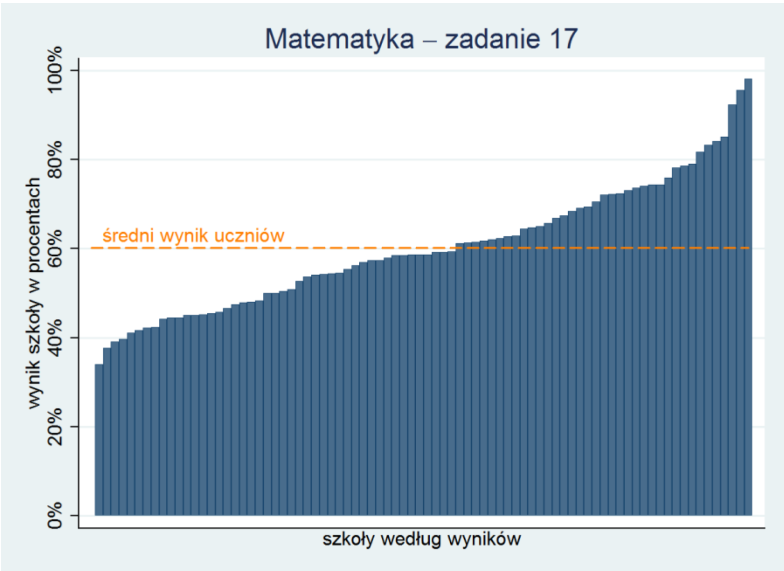
odpowiedź	procent wybierających
A	12
B	60*
C	23
D	5

Aby rozwiązać to zadanie wystarczyło umieć obliczyć pole trójkąta, który jest nietypowo ułożony. Inną metodą rozwiązania jest szacowanie – widać, że pole tego trójkąta jest większe niż 3 kratki i mniejsze niż 12 kratek, nie wspominając już o 18 kratkach.

Łatwo można się domyślić, jaki błąd stoi za wyborem odpowiedzi C. (12) – uczeń prawdopodobnie pomnożył podstawę trójkąta przez wysokość i zapomniał, że powinien otrzymaną liczbę podzielić przez 2. Nie potrafimy natomiast wytłumaczyć, z jakich powodów uczniowie wybierali odpowiedzi A lub D, które są zupełnie nieprawdopodobne, jeśli popatrzy się na towarzyszący zadaniu rysunek.



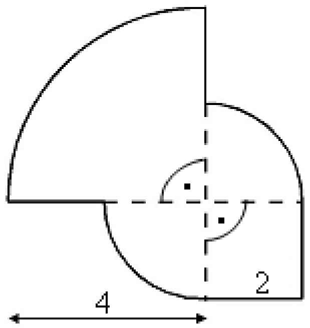
Wykres pokazuje, że tylko bardzo słabi uczniowie równie często wybierali poprawną odpowiedź B, jak błędną C. Wszyscy pozostali uczniowie zdecydowanie częściej wybierali poprawną odpowiedź B niż którąkolwiek z pozostałych. Widzimy również, że dystraktor C jest zdecydowanie częściej wybierany niż pozostałe dwa – niezależnie od poziomu umiejętności uczniów.



W tym zadaniu wyniki większości szkół mieszczą się w granicach 35% - 85%. Trzy najlepsze szkoły osiągnęły wyniki równe: 92%, 96%, 98%.

Zadanie 18.

Narysowana poniżej figura składa się z kwadratu i trzech ćwiartek kół.



Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

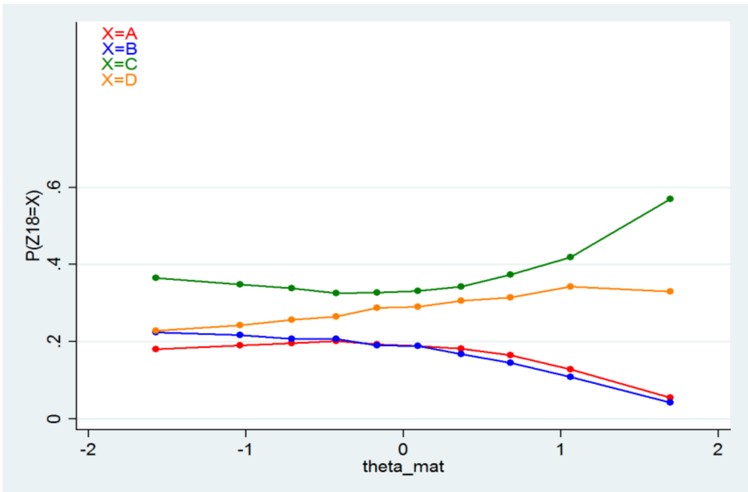
Obwód tej figury jest równy

A. $10\pi + 8$ **B.** $10\pi + 4$ **C.** $4\pi + 8$ **D.** $4\pi + 4$

odpowiedź	procent wybierających
A	17
B	17
C	37*
D	29

Do rozwiązania tego zadania niezbędna jest umiejętność obliczania obwodu koła. Konieczna jest również uwaga i systematyczność, aby nie pominąć w rachunkach żadnego z odcinków, składających się na obwód przedstawionej figury.

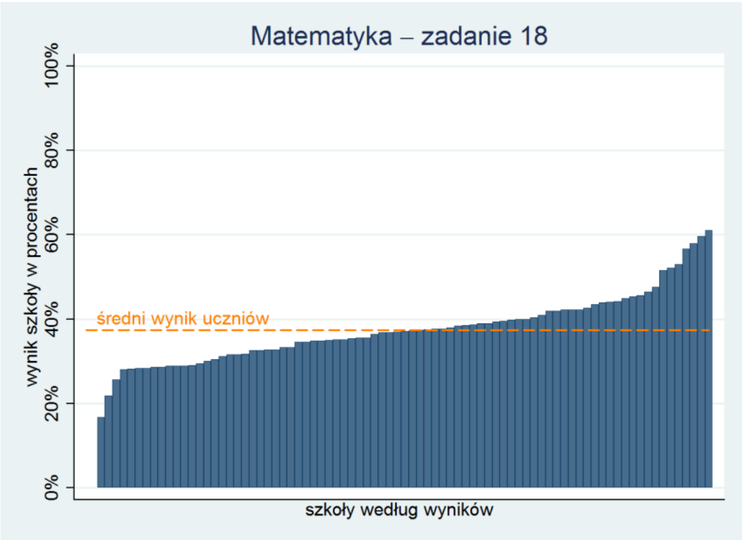
Łatwo można się domyślić, jaki błąd stoi za wyborem odpowiedzi D – uczeń poprawnie obliczył długości ćwiartek obwodów kół, dodał dwa boki kwadratu, ale zapomniał o dwóch odcinkach o długości 2, które ograniczają wycinek największego koła.



Patrząc na przedstawiony powyżej wykres widzimy, że w takiej postaci zadanie to funkcjonuje źle: krzywa ilustrująca wybór poprawnej odpowiedzi C nie rośnie wraz ze wzrostem poziomu umiejętności, a wręcz przeciwnie – przez połowę swojej długości lekko maleje. Dopiero dla poziomu umiejętności ok. 0,75 odchylenia standardowego (czyli dla uczniów dość dobrych) osiąga taką samą wartość, jaką miała na początku (dla uczniów najsłabszych) i zaczyna rosnąć. Jednak nawet dla uczniów najlepszych prawdopodobieństwo wyboru poprawnej odpowiedzi wynosi mniej niż 0,6.

Z kolei krzywa ilustrująca wybór niepoprawnej odpowiedzi D rośnie wraz ze wzrostem poziomu umiejętności uczniów. Przypomnijmy, że odpowiedź tę wybierali uczniowie, którzy potrafili obliczyć długości łuków koła, ale zapominali o dodaniu dwóch odcinków, a zatem brakowało im raczej uwagi niż umiejętności. Gdybyśmy zrezygnowali z takiej odpowiedzi, najprawdopodobniej uczniowie, którzy ją wybierali, zorientowaliby się, że popełnili błąd i wybrali odpowiedź poprawną.

Jednak w ten sposób nie zmienilibyśmy innej nienajlepszej cechy tego zadania: krzywe ilustrujące wybór niepoprawnych odpowiedzi A i B na większości swojej długości są prawie poziome. Oznacza to, że odpowiedzi te są tak samo często wybierane zarówno przez uczniów bardzo słabych jak i średnich. Dopiero uczniowie dobrzy i bardzo dobrzy wybierają je rzadziej.



W najsłabszej szkole zadania nie rozwiązał nikt – wynik wynosi 0%. Wyniki pozostałych szkół mieszczą się w granicach 17% - 61%.

Zadanie 19.

Z 36 sześcianów o krawędziach długości 1 zbudowano graniastosłup prawidłowy czworokątny.

Które wymiary, z podanych w tabeli, może mieć ten graniastosłup? Wybierz odpowiedź spośród A–E.

I	$1 \times 3 \times 12$
II	$1 \times 6 \times 6$
III	$2 \times 2 \times 9$
IV	$2 \times 3 \times 6$
V	$3 \times 3 \times 4$

A. I, II i III
B. III, IV i V
C. I, II i IV
D. II, III i V
E. Wszystkie podane.

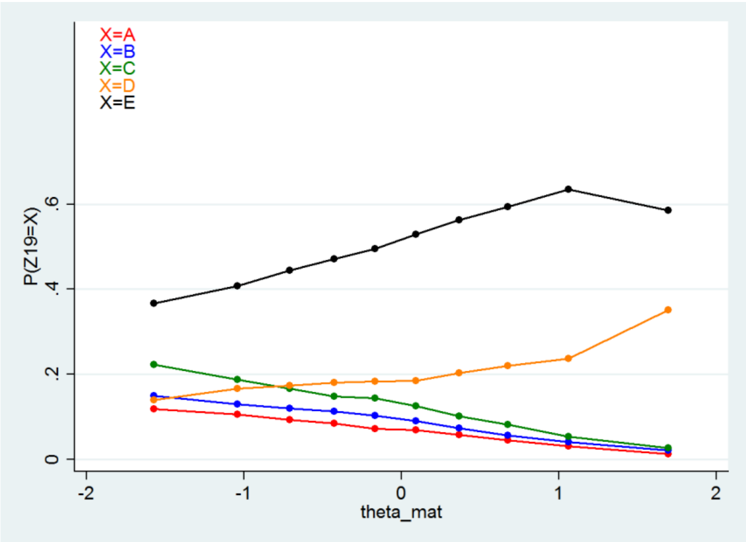
odpowiedź	procent wybierających
A	7
B	9
C	13
D	20*
E	51

Aby rozwiązać to zadanie trzeba rozumieć pojęcie objętości bryły i umieć obliczyć objętość prostopadłościanu. Trzeba także znać zasady nazywania brył.

Łatwo można się domyślić, jaki błąd stoi za wyborem odpowiedzi E. – uczeń nie zauważył słowa „prawidłowy" w treści zadania. Taki błąd nieuwagi skutkuje tym, że wszystkie podane w tabelce wymiary bryły spełniają warunki zadania i poprawna wydaje się odpowiedź E.

Nie jest jasne natomiast, jakie błędy stoją za wyborem odpowiedzi A, B lub C.

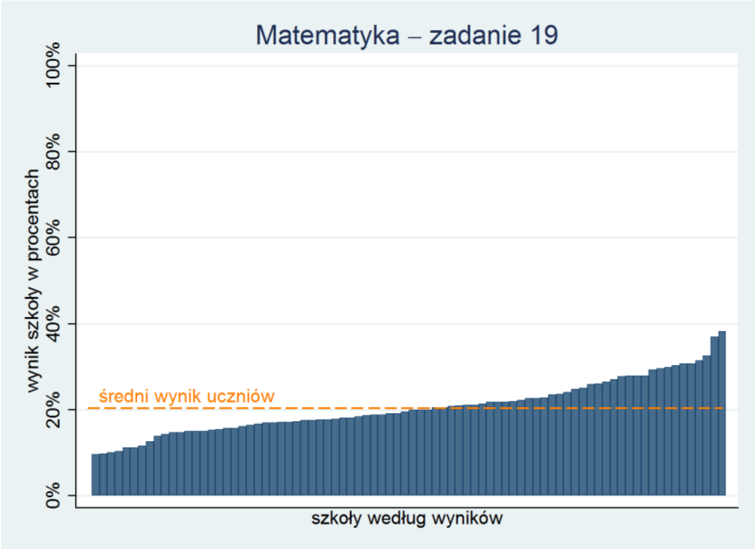
Warto zauważyć, jak brzmi ta niepoprawna, a jednak wybrana przez ponad 50% uczniów odpowiedź: „Wszystkie podane". Wielokrotnie można usłyszeć opinię, że odpowiedzi takie jak przytoczona, czy też odpowiedź „Żadna z podanych" są przez uczniów z góry odrzucane, jako niepoprawne i w efekcie nigdy nie wybierane. Przykład tego zadania przeczy tej opinii.



Patrząc na ten wykres wydaje się, że poprawna jest odpowiedź E, ponieważ odpowiadająca jej krzywa szybko rośnie wraz ze wzrostem umiejętności uczniów i dopiero wśród najlepszych uczniów jej wartość nieco maleje. Niestety, tak nie jest. Poprawna jest odpowiedź D. Krzywa odpowiadająca tej odpowiedzi nie rośnie tak szybko i nawet wśród najlepszych uczniów ma wartość niższą niż 0,4.

Gdybyśmy, podobnie jak w poprzednim zadaniu, zrezygnowali z odpowiedzi E, uczniowie, którzy ją wybierali zorientowaliby się, że popełnili błąd – być może jeszcze raz przeczytaliby treść zadania, zauważyli słowo, które poprzednio im umknęło i w efekcie wybrali poprawną odpowiedź. Wtedy wartości dla obu tych krzywych dodałyby się do siebie, a uzyskana w ten sposób krzywa miałaby bardzo dobry kształt i wartości, co z kolei przekładałoby się na diametralnie lepszą wartość informacyjną zadania.

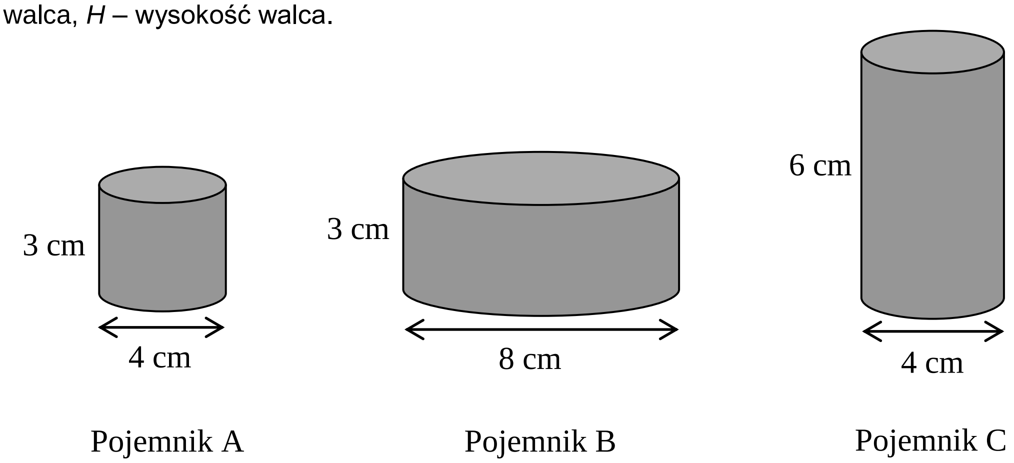
Przypuszczenie, że po zaproponowanej zmianie zadanie funkcjonowałoby bardzo dobrze, oparte jest także na obserwacji kształtu wykresów odpowiadających odpowiedziom A – C.



W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 10% uczniów, a w najlepszej 38%.

Zadanie 20.

Krem jest sprzedawany w trzech rodzajach pojemników. Każdy pojemnik ma kształt walca, którego wewnętrzne wymiary podane są na rysunku.
Objętość walca oblicza się ze wzoru $V = \pi r^2 \cdot H$, gdzie r oznacza promień koła będącego podstawą walca, H – wysokość walca.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

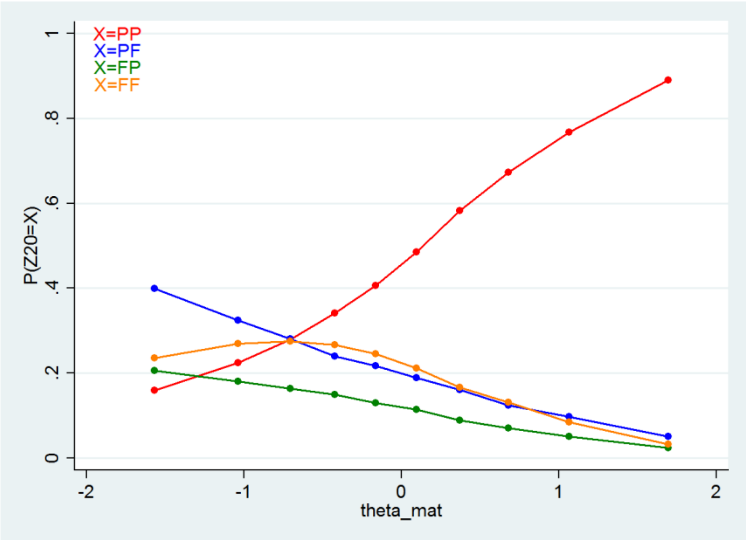
W pojemniku B mieści się cztery razy więcej kremu niż w pojemniku A.	**P**	**F**
W pojemniku C mieści się dwa razy mniej kremu niż w pojemniku B.	**P**	**F**

odpowiedź	procent wybierających
PP	48*
PF	21
FP	12
FF	19

Aby rozwiązać to zadanie wystarczy obliczyć objętość każdego pojemnika, wstawiając podane wymiary do podanego wzoru, a następnie sprawdzić, czy między otrzymanymi wielkościami zachodzą podane w ramce zależności. Pewną trudność może stanowić fakt, że w wielu szkołach nie omawiano jeszcze zagadnienia brył obrotowych. A zatem możliwe jest, że niektórzy uczniowie po raz pierwszy spotykają się zarówno z walcem, jak i z wzorem na jego objętość. Ale ponieważ w treści zadania podano ten wzór, nawet ci uczniowie mogą rozwiązać zadanie.

Innym sposobem uzyskania odpowiedzi na zadane pytania, bez konieczności wykonywania żadnych rachunków, jest wykorzystanie skali podobieństwa kół będących podstawami pojemników.

Jak widać z tych wyników, uczniowie częściej niepoprawnie oceniali prawdziwość drugiej z podanych zależności. Być może świadczy to o tym, że część uczniów oceniała prawdziwość podanych zależności „na oko”. W takim przypadku druga zależność wydaje się mniej prawdopodobna.

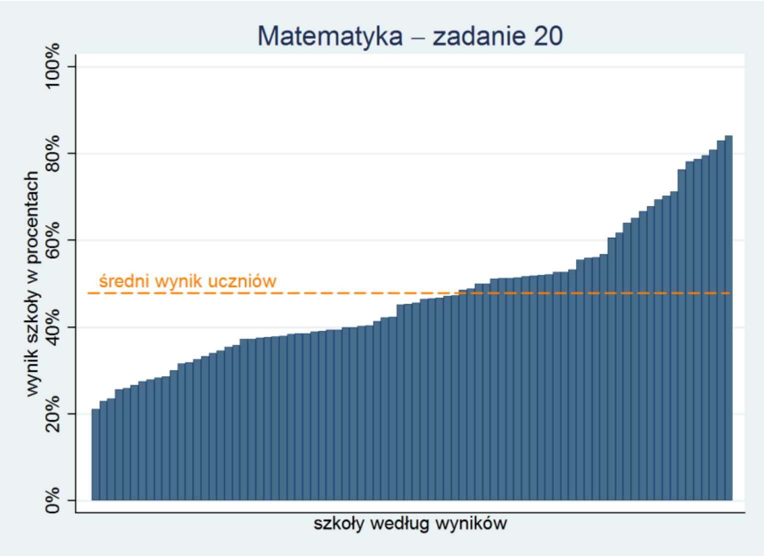


Na powyższym wykresie widzimy, że konsekwentnie najrzadziej była wybierana kombinacja: niepoprawna ocena pierwszej zależności i poprawna drugiej. Prawdopodobieństwo wybrania takiej odpowiedzi systematycznie maleje, dla uczniów najlepszych przyjmując wartości bliskie zeru.

Podobnie systematycznie malało prawdopodobieństwo błędu odwrotnego: poprawnej oceny pierwszej zależności i niepoprawnej drugiej. Jednak dla każdego poziomu umiejętności jest to błąd częściej popełniany, niż wspomniany poprzednio.

Inaczej wygląda krzywa odpowiadająca sytuacji, gdy uczeń niepoprawnie ocenia obie podane zależności – jej wartości początkowo rosną i dopiero później maleją prawie do zera. Być może taki kształt wykresu wskazuje, że jeśli błąd rachunkowy popełniają uczniowie o trochę wyższych umiejętnościach, to błąd ten jest systematyczny i skutkuje niepoprawną oceną obu podanych zależności, a nie tylko jednej.

Wreszcie wykres odpowiadający obu poprawnym ocenom, czyli PP – ciekawe, że wśród uczniów najsłabszych jest to najrzadziej wybierana kombinacja. Jednak wraz ze wzrostem umiejętności uczniów prawdopodobieństwo wybrania właśnie takiej odpowiedzi gwałtownie rośnie, osiągając dla uczniów najlepszych wartość bliską 0,9.

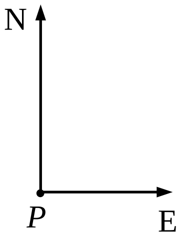


W najsłabszej szkole zadanie rozwiązało poprawnie 21% uczniów, a w najlepszej 84%.

Zadanie 21.

Z portu rybackiego (punkt *P*) wypłynęły jednocześnie na połów dwa kutry: jeden na północ ze stałą prędkością 4 węzłów, drugi na wschód ze stałą prędkością 3 węzłów.

Oblicz odległość między tymi kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia. Wynik podaj w kilometrach. Zapisz obliczenia.



Do rozwiązania zadania skorzystaj z informacji: 1 węzeł to 1 mila morska na godzinę, 1 mila morska = 1852 m.

Rozwiązanie

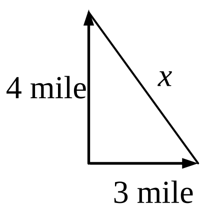
Na rozwiązanie tego zadania składają się 3 kroki:

1. obliczenie z tw. Pitagorasa odległości między kutrami,
2. pomnożenie przez 2, aby uwzględnić czas ruchu wynoszący 2 godziny,
3. przeliczenie mil na kilometry.

Kroki te mogą być wykonane w dowolnej kolejności:
w **I** przedstawionym poniżej rozwiązaniu kolejność ta jest taka, jak wymieniona powyżej: 1, 2, 3 krok,
w **II** rozwiązaniu najpierw wykonano 2 krok, następnie 1 i na końcu 3,
natomiast w **III** rozwiązaniu najpierw mamy krok 3, następnie 2, a na końcu 1.

<u>I przykładowe rozwiązanie</u>

Po godzinie:
jeden kuter przepłynął 4 mile morskie,
drugi kuter przepłynął 3 mile morskie.
Z trójkąta egipskiego wiadomo, że odległość *x* między nimi jest równa 5 mil morskich.



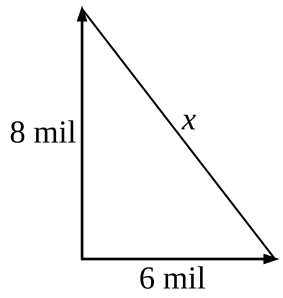
Po 2 godzinach odległość między kutrami będzie dwa razy większa, czyli $2 \cdot 5 = 10$ mil morskich.
10 mil morskich, to $10 \cdot 1852$ m = 18520 m = 18,52 km

Odpowiedź: Odległość między kutrami po 2 godzinach od wypłynięcia jest równa 18,52 km.

<u>II przykładowe rozwiązanie</u>

Drogę w ruchu jednostajnym obliczamy mnożąc prędkość przez czas.
W ciągu dwóch godzin jeden z kutrów przepłynął $2 \cdot 4 = 8$ (mil morskich), drugi $2 \cdot 3 = 6$ (mil morskich).
Odległość między kutrami (x) obliczamy, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

$x^2 = 8^2 + 6^2$
$x^2 = 64 + 36$
$x^2 = 100$
$x = 10$ (mil morskich)



10 mil morskich, to $10 \cdot 1852$ m = 18520 m = 18,52 km

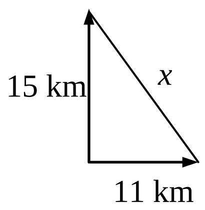
Odpowiedź: Odległość między kutrami po 2 godzinach od wypłynięcia jest równa 18,52 km.

<u>III przykładowe rozwiązanie</u>

1 węzeł to 1852 km/h
Stąd w ciągu 1 godziny pierwszy kuter przepłynie 7,408 km, a drugi 5,556 km.
Po 2 godzinach będzie to odpowiednio 14,816 km (w przybliżeniu 15 km) i 11,112 km (w przybliżeniu 11 km).

Z tw. Pitagorasa obliczamy odległość między kutrami po 2 godzinach:

$x^2 = 15^2 + 11^2$
$x^2 = 225 + 121$
$x^2 = 346$
$x = \sqrt{346}$ $\qquad 18 < x < 19$



Odp. Odległość między kutrami wynosi około 18,5 kilometra.

Schemat oceniania

P_6 – <u>pełne rozwiązanie</u> – **3 punkty**

obliczenie odległości w km między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia: 18,52 km

lub

liczba w postaci dziesiętnej o wartości pomiędzy 18 km i 19 km, np. około 18,5 km

lub

pierwiastek lub wyrażenie zawierające pierwiastek, o wartości pomiędzy 18 km i 19 km, np. $\sqrt{346}$ km lub $2\sqrt{86}$ km

P_4 – <u>zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera błędy merytoryczne lub rachunkowe</u> – **2 punkty**

obliczenie odległości w milach między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia (10 mil morskich) lub

obliczenie odległości w metrach lub kilometrach między kutrami po godzinie od wypłynięcia (9260 m lub 9,26 km)

lub

odległości w kilometrach między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia, ale z błędem rachunkowym lub z błędem w zamianie jednostek

P_2 – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane – **1 punkt**

obliczenie drogi przebytej przez każdy kuter w ciągu dwóch godzin w milach (8 mil morskich, 6 mil morskich)

lub

obliczenie drogi przebytej przez każdy kuter w ciągu dwóch godzin w metrach (14816 m, 11112 m) lub w kilometrach (14,816 km i 11,112 km)

lub

obliczenie odległości między kutrami po godzinie od wypłynięcia (5 mil morskich)

P_0 – rozwiązanie niestanowiące postępu – 0 punktów

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Uzyskane wyniki

Liczba punktów	0	1	2	3
Odsetek uczniów	45,2%	28,3%	13,4%	13,1%

Spośród 13% uczniów, którzy w pełni rozwiązali zadanie, czyli uzyskali 3 punkty, około 10% rozwiązywało zadanie pierwszym lub drugim z przedstawionych wyżej sposobów, czyli wstawili do tw. Pitagorasa odległości przebyte przez kutry wyrażone w milach. Pozostałe 3% uczniów najpierw przeliczyli przebytą przez każdy z kutrów odległość z mil na kilometry, a następnie tak uzyskane wielkości (dokładne lub w przybliżeniu) podstawili do tw. Pitagorasa, czyli rozwiązali zadanie trzecim z przedstawionych sposobów.

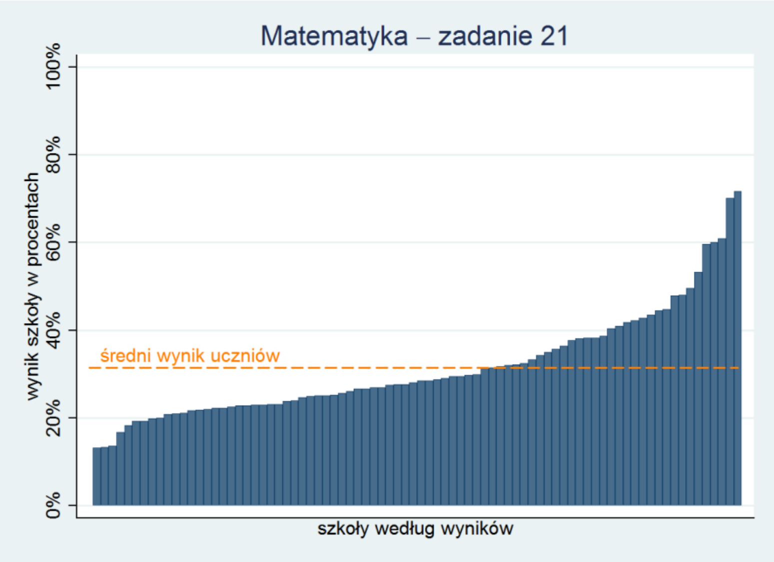
Strategia rozwiązywania tego zadania zastosowana w rozwiązaniach I i II jest zdecydowanie korzystniejsza, niż zaprezentowana w rozwiązaniu III, gdyż wymaga bardzo prostych rachunków na jednocyfrowych liczbach całkowitych. Tymczasem rozwiązując to zadanie sposobem III, trzeba podnosić do kwadratu liczby co najmniej dwucyfrowe, jeśli przybliży się odległości do 11 km i 15 km. Niestety wielu uczniów nie stosowało przybliżeń, co prowadziło do prób podnoszenia do kwadratu liczb nawet siedmiocyfrowych (!) Taka strategia rozwiązania tego zadania niemal nigdy nie była skuteczna – zaledwie 0,4% uczniów rozwiązało zadanie bezbłędnie nie stosując przybliżeń.

Wśród uczniów, którzy uzyskali za zadanie 2 punkty, większość czyli 9,3% rozwiązało zadanie do końca, ale popełnili przy tym błędy rachunkowe. Do tej kategorii trafiało m.in. bardzo wielu uczniów, którzy wstawili do tw. Pitagorasa wielkości bez przybliżeń i przeprowadzili obliczenia do końca, ale z błędami rachunkowymi. Niestety jest w tej kategorii także wielu uczniów, którzy popełnili elementarne błędy rachunkowe lub błędy nieuwagi.

Pozostałe 4,1% uczniów, którzy uzyskali 2 punkty, to uczniowie, którzy nie rozwiązali zadania do końca.

Spośród 28,3% uczniów, którzy uzyskali za zadanie 1 punkt zdecydowana większość, czyli 23% wszystkich uczniów, poprawnie obliczyła drogę w kilometrach przebytą przez każdy z kutrów w ciągu 2 godzin. Część spośród tych uczniów uzyskane wielkości, bez stosowania przybliżeń, wstawiała do tw. Pitagorasa. Niestety podnoszenie do kwadratu, bez kalkulatora, liczb siedmiocyfrowych przekraczało ich możliwości i porzucali oni rozpoczęte rachunki, nie dochodząc do końca. Inni uczniowie odejmowali od siebie obliczone odległości, co jest oczywiście niepoprawne. Pozostałe 5,3% uczniów obliczyło drogę przebytą przez każdy kuter w ciągu 2 godzin w milach lub obliczyło odległość między kutrami po godzinie od wypłynięcia.

Za to zadanie 0 punktów uzyskali uczniowie, których rozwiązanie nie spełniało żadnego z kryteriów na wyższą ocenę (41,2% wszystkich uczniów) oraz uczniowie, którzy w ogóle nie podjęli próby rozwiązania zadania (4% wszystkich uczniów).



Zadanie w całej próbie miało łatwość 0,31.

W większości szkół wyniki tego zadania mieściły się w przedziale 13% - 61% punktów możliwych do uzyskania. Jedynie w dwóch najlepszych szkołach wyniki były wyższe i wynosiły 70% i 72%.

Podsumowując, w zadaniu 21. bardzo ważne było wybranie odpowiedniej strategii rozwiązania. Gorsza strategia (zbyt wczesna zamiana mil na kilometry) prowadziła do bardzo wielu pomyłek rachunkowych (co skutkowało obniżeniem oceny z 3 na 2 punkty). Innym skutkiem wyboru tej gorszej strategii było porzucenie rozwiązywania, nie dochodząc do końca, co dawało uczniowi zaledwie 1 z 3 punktów.

Zadanie 22.

Uzasadnij, że jeśli liczba jest podzielna przez 15 i przez 14, to jest podzielna przez 10.

Rozwiązanie

Uzasadnienie tej własności można przeprowadzić na 3 sposoby:

- I sposób: rozumowanie oparte na fakcie, że z podzielności liczby przez 14 i 15 wynika podzielność przez 2 i 5, a stąd podzielność przez 10 (I przykładowe rozwiązanie).
- II sposób: rozumowanie oparte na rozważaniu, jaka może być ostatnia cyfra w liczbach, które są jednocześnie podzielne przez 14 i 15 (II przykładowe rozwiązanie).
- III sposób: rozumowanie oparte na fakcie, że z podzielności liczby przez 14 i 15 wynika podzielność przez 210, a stąd podzielność przez 10 (III przykładowe rozwiązanie).

I przykładowe rozwiązanie

Jeżeli liczba jest podzielna przez 15, to jest podzielna przez 3 i 5.
Jeżeli liczba jest podzielna przez 14, to jest podzielna przez 2 i 7.

Ponieważ ta liczba jest podzielna jednocześnie przez 14 i 15, to znaczy, że jest podzielna przez 2, 3, 5 i 7. A jeśli jest podzielna przez 2 i 5 to jest podzielna przez 10.

II przykładowe rozwiązanie

Cyfra jedności liczb podzielnych przez 15 to 0 lub 5.
Cyfra jedności liczb podzielnych przez 14 to 0, 2, 4, 6 lub 8.
Cyfra jedności liczb podzielnych przez 10 to 0.

Jeśli liczba dzieli się jednocześnie przez 15 i 14 to jej cyfrą jedności musi być 0. Bo gdyby była to 5, to liczba nie dzieliłaby się przez 14, a gdyby była to 2 lub 4 lub 6 lub 8, to liczba nie dzieliłaby się przez 15. A skoro jej cyfrą jedności jest 0 to liczba ta dzieli się przez 10.

III przykładowe rozwiązanie

Ponieważ liczby 14 i 15 są względnie pierwsze (nie mają żadnych wspólnych dzielników), to liczby podzielne zarówno przez 14 jak i 15 są wielokrotnościami ich iloczynu.

Iloczyn $14 \cdot 15 = 210$

A ponieważ liczba 210 jest podzielna przez 10, to każda jej wielokrotność również będzie podzielna przez 10.

Schemat oceniania

P_6 – pełne rozwiązanie – 2 punkty

Uczeń przeprowadził poprawne rozumowanie

P_4 – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne – 1 punkt

Uczeń przeprowadził rozumowanie, jednak jest ono niejasne lub niepełne

P_0 – rozwiązanie niestanowiące postępu – 0 punktów

Rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Uzyskane wyniki

Liczba punktów:	0	1	2
Odsetek uczniów:	86,6%	6,9%	6,5%

Na 6,5% uczniów, którzy przeprowadzili poprawne rozumowanie i uzyskali 2 punkty za to zadanie, składa się:

3,1% uczniów, których rozumowanie oparte było na podzielności liczb 14 i 15 odpowiednio przez 2 i 5 (I sposób),

1,9% uczniów, których rozumowanie oparte było na rozważaniu, jaka może być ostatnia cyfra w liczbach, które są jednocześnie podzielne przez 14 i 15 (II sposób),

1,5% uczniów, których rozumowanie oparte było na fakcie, że z podzielności liczby przez 14 i 15 wynika podzielność przez 210, a stąd podzielność przez 10 (II sposób).

Wśród 6,9% uczniów, którzy uzyskali 1 punkt, czyli przeprowadzone przez nich rozumowanie było nie dość jasne i logiczne jest 2,5% uczniów, którzy stosowali I sposób rozumowania, 2,8%, którzy stosowali II sposób rozumowania i 1,6%, którzy stosowali III sposób rozumowania.

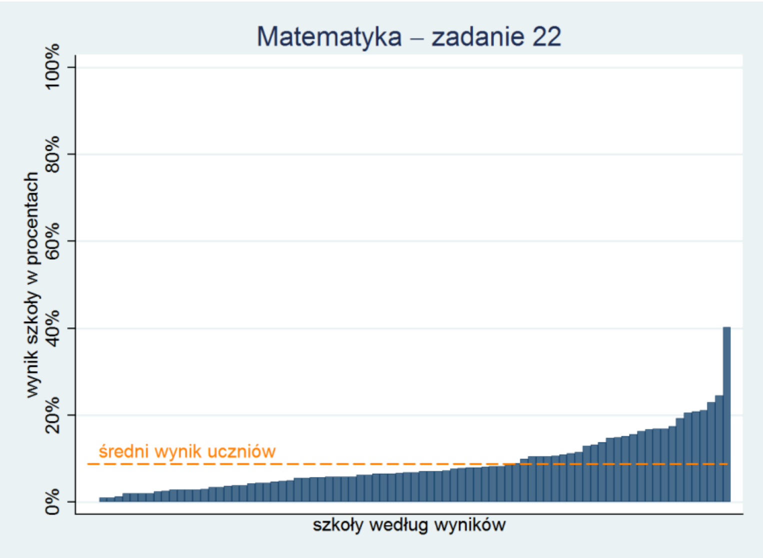
Na 86,6% wyników zerowych składa się:

18,4% rozwiązań, w których uczeń wymienia liczbę 210 lub nawet uzasadnia jej podzielność przez 10, lecz traktuje tę liczbę tylko jako przykład liczby podzielnej przez 14 i 15,

40,6% uzasadnień błędnych lub zupełnie niejasnych

i 27,6% opuszczeń tego zadania.

Licząc inaczej, wśród 13,4% uczniów, którzy uzyskali za to zadanie więcej niż 0 punktów, 5,6% rozumowało I sposobem, 4,7% II sposobem, a 3,1% III sposobem.



Zadanie w całej próbie miało łatwość 0,09.

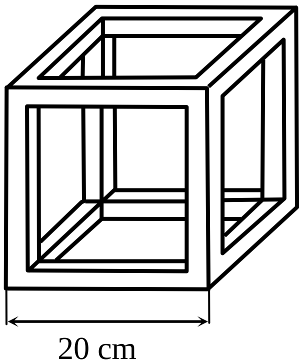
W najsłabszej szkole żaden uczeń nie dostał choćby 1 punktu za to zadanie. W większości wyniki mieściły się w przedziale od 1% do 25% punktów możliwych do uzyskania. Jedynie w jednej szkole wynik był zdecydowanie lepszy i wyniósł 40%.

Podsumowując:

Zadanie 22 okazało się, tak jak można się było tego spodziewać, zadaniem bardzo trudnym dla uczniów. Znalazło się jednak ponad 13% uczniów, którzy podjęli skuteczna próbę przeprowadzenia takiego rozumowania dotyczącego podzielności – próbę częściowo lub całkowicie udaną.

Zadanie 23.

Wojtek wykonał taki model sześcianu, jak przedstawiono na rysunku. Używał listewek, których przekrój poprzeczny jest kwadratem o boku 2 cm. Krawędź sześcianu ma długość 20 cm**. Oblicz masę tego modelu, wiedząc, że 1 cm^3 drewna, z którego go wykonano, ma masę 0,8 g. Zapisz obliczenia.**



Rozwiązanie

Aby rozwiązać to zadanie należy podzielić zbudowany z listewek model na mniejsze kawałki, których objętość będzie łatwa do policzenia (przykładowe rozwiązania I – III). Można również z pełnego sześcianu o krawędzi 20 cm wycinać odpowiednie bryły, tak, aby otrzymać przedstawiony model (IV przykładowe rozwiązanie). Następnie należy obliczyć objętość modelu i jego masę.

<u>I przykładowe rozwiązanie</u>

Listewki dzielimy na 4 prostopadłościany o wymiarach 20 cm x 2 cm x 2 cm i 8 prostopadłościanów o wymiarach 16 cm x 2 cm x 2 cm. Zatem objętość modelu jest sumą objętości tych brył.

$4 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 2 + 8 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 2 = 832\ (cm^3)$

Masa listewek użytych do wykonania modelu jest równa $832 \cdot 0{,}8 = 665{,}6$ (g).

Odpowiedź: Masa modelu jest równa 665,6 g.

<u>II przykładowe rozwiązanie</u>

Listewki dzielimy na 4 prostopadłościany o wymiarach 16 cm x 2 cm x 2 cm i 8 prostopadłościanów o wymiarach 18 cm x 2 cm x 2 cm. Zatem objętość modelu jest sumą objętości tych brył.

$4 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 2 + 8 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 2 = 832\ (cm^3)$

Masa listewek użytych do wykonania modelu jest równa $832 \cdot 0{,}8 = 665{,}6$ (g).

Odpowiedź: Model ma masę 665,6 g.

<u>III przykładowe rozwiązanie</u>

Listewki dzielimy na 12 prostopadłościanów o wymiarach 16 cm x 2 cm x 2 cm i 8 sześcianów o krawędzi 2 cm. Zatem objętość modelu jest sumą objętości tych brył.

$12 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2^3 = 832\ (cm^3)$

Stąd masa tych listewek to $832 \cdot 0{,}8 = 665{,}6$ (g).

Odpowiedź: Model ma masę 665,6 g.

<u>IV przykładowe rozwiązanie</u>

Jeśli od objętości sześcianu o krawędzi 20 cm odejmiemy objętość sześcianu o krawędzi 16 cm oraz objętość 6 prostopadłościanów o wymiarach 16 cm x 16 cm x 2 cm, to otrzymamy objętość modelu.

$20^3 - 16^3 - 6 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 2 = 832\ (cm^3)$

Masa listewek użytych do wykonania modelu to $832 \cdot 0{,}8 = 665{,}6$ (g).

Odpowiedź: Masa modelu jest równa 665,6 g.

Schemat oceniania

P_6 – <u>pełne rozwiązanie</u> – 4 punkty

obliczenie masy modelu – 665,6 g

P_5 – <u>zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)</u> **–** 3 punkty

poprawnie wyznaczono objętość modelu (832 cm^3), ale poprzestano na tym lub popełniono błąd w metodzie wyznaczania jego masy

lub

wybrano poprawną metodę obliczenia objętości i masy modelu, ale popełniono błędy rachunkowe

P_4 – <u>zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne</u> – 2 punkty

określono wymiary i liczbę prostopadłościanów, z których można otrzymać model (podano je wprost lub wynikają one z dalszych obliczeń), ale poprzestano na tym lub popełniono błąd w metodzie wyznaczania jego objętości

P_2 – <u>dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane</u> **–** 1 punkt

podzielono model na prostopadłościany (np. na rysunku), ale błędnie podano wymiary albo liczbę tych prostopadłościanów

lub

podjęto próbę otrzymania modelu poprzez wycięcie z sześcianu o krawędzi 20 cm sześcianu o krawędzi 16 cm i co najmniej jednego innego prostopadłościanu

P_0 – <u>rozwiązanie niestanowiące postępu</u> – 0 punktów

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Uzyskane wyniki

Liczba punktów:	0	1	2	3	4
Odsetek uczniów:	89,8%	2,4%	0,4%	1,8%	5,6%

Zadanie to okazało się zaskakująco trudne dla uczniów III klasy gimnazjum. Tylko 5,6% uczniów rozwiązało je w pełni poprawnie i uzyskało 4 punkty.

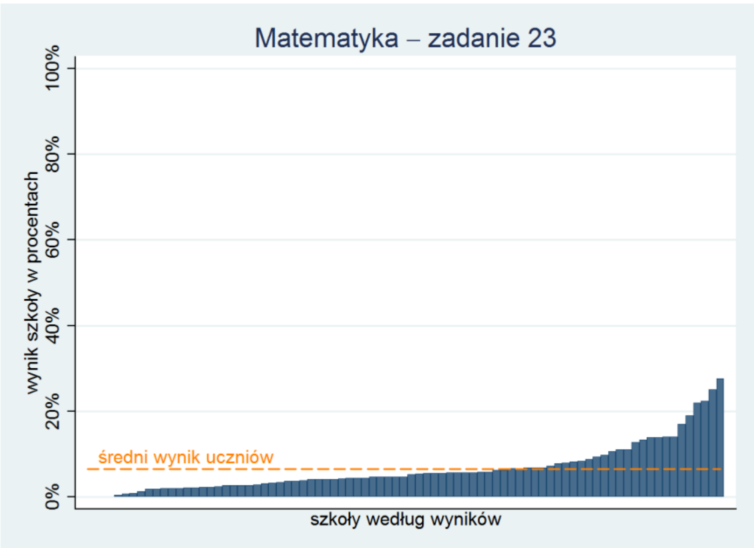
Kolejne 1,8% uczniów otrzymało za to zadanie 3 punkty. Wśród tych prac nie było rozwiązań, w których uczeń mając objętość, nie potrafiłby obliczyć masy modelu lub robił to niepoprawnie. Wszyscy uczniowie, którzy otrzymali 3 punkty, rozwiązali zadanie do końca, ale z błędami rachunkowymi.

Właściwie nie było również uczniów (0,4%), którzy mając poprawny podział modelu na prostsze bryły, nie potrafiliby obliczyć jego objętości lub robili to niepoprawnie.

Okazuje się, że niewielu również było uczniów, zaledwie 2,4% , którzy dzielili model na prostsze prostopadłościany, ale błędnie podawali ich wymiary albo liczbę.

Niestety większość uczniów, prawie 90%, otrzymała za to zadanie 0 punktów. Wśród nich było 14,8% uczniów, którzy podejmowali próbę podziału modelu na prostsze prostopadłościany, ale popełniali przy tym więcej niż jeden rodzaj błędu, np. błędnie podawali i wymiary i liczbę tych prostopadłościanów. Kolejne 50% uczniów rozpoczynało rozwiązywanie zadania zupełnie błędnie lub tylko rysowało coś na modelu. I ostatnie 25% w ogóle nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Łącznie zaledwie 10,2% uczniów uzyskało za to zadanie 1 punkt lub więcej. Dla pozostałych barierą nie do przebycia okazała się konieczność podzielenia sześciennego „szkieletu" na mniejsze kawałki.



Zadanie w całej próbie miało łatwość 0,065.

W najsłabszej szkole ani jedna osoba nie dostała nawet 1 punktu, a w najlepszej łatwość wynosiła 0,28.

Podsumowując, zadanie okazało się nadzwyczaj trudne – trudniejsze nawet niż zadanie na dowodzenie (zadanie 22.).

4. Podsumowanie. Mocne i słabe strony gimnazjalistów.

1. W grupie najlepszych 20 szkół znalazło się 19 szkół miejskich z 52 szkół miejskich wylosowanych do badania (ok. 37%) oraz tylko 1 szkoła wiejska na 28 wylosowanych do badania (ok. 3,6%).

2. Ocena trudności zadań dokonana przez uczniów w przeważającej części zgadzała się z obliczoną rzeczywistą trudnością tych zadań. Od tej reguły odbiegają zadania otwarte, a zwłaszcza zadania 21. (o kutrach) i 22. (uzasadnienie podzielności), które uczniowie uznali za mniej niż „raczej trudne", a w rzeczywistości są one jednymi z najtrudniejszych w arkuszu.

3. Wydaje się, że znaczna część uczniów nie jest przyzwyczajona do sprawdzania, czy podane przez nich rozwiązanie ma sens. Objawiało się to wskazywaniem odpowiedzi wyraźnie sprzecznych z warunkami zadania lub ze zdrowym rozsądkiem. Na przykład w zadaniu 17. (o polu narysowanego trójkąta) wyraźnie widać na rysunku, że dwie z proponowanych odpowiedzi nie są możliwe do zaakceptowania, a wskazało je w sumie aż 28% uczniów.

4. Ogromną trudność sprawiło uczniom zadanie, w którym trzeba było podać uzasadnienie (zadanie 22.). Ponieważ uczniowie średnio ocenili to zadanie na mniej niż „raczej trudne", najwyraźniej wielu uczniom wydawało się, uzasadnili podaną w tym zadaniu własność, a w rzeczywistości nie potrafili podać właściwych argumentów. Było to zadanie, które opuściło najwięcej uczniów – niemal 28%. Rozumowanie i argumentacja to jedno z pięciu wymagań ogólnych (celów nauczania) zapisanych w podstawie programowej. Wyniki diagnozy wskazują, że jest jeszcze sporo do zrobienia, by ten cel osiągnąć.

5. Najtrudniejszym okazało się zadanie 23., do którego rozwiązania z pozoru wystarczy umiejętność obliczania objętości prostopadłościanu. Tymczasem niemal 90% uczniów nie zdobyło za to zadanie ani jednego punktu (a zdobyć można było 4 punkty). Trudnością nie do pokonania dla tak ogromnej większości uczniów okazała się konieczność dostrzeżenia prostopadłościanów w nieco bardziej skomplikowanej bryle. Inaczej mówiąc, 90% uczniów nie ma wyrobionej wyobraźni przestrzennej nawet w podstawowym zakresie.